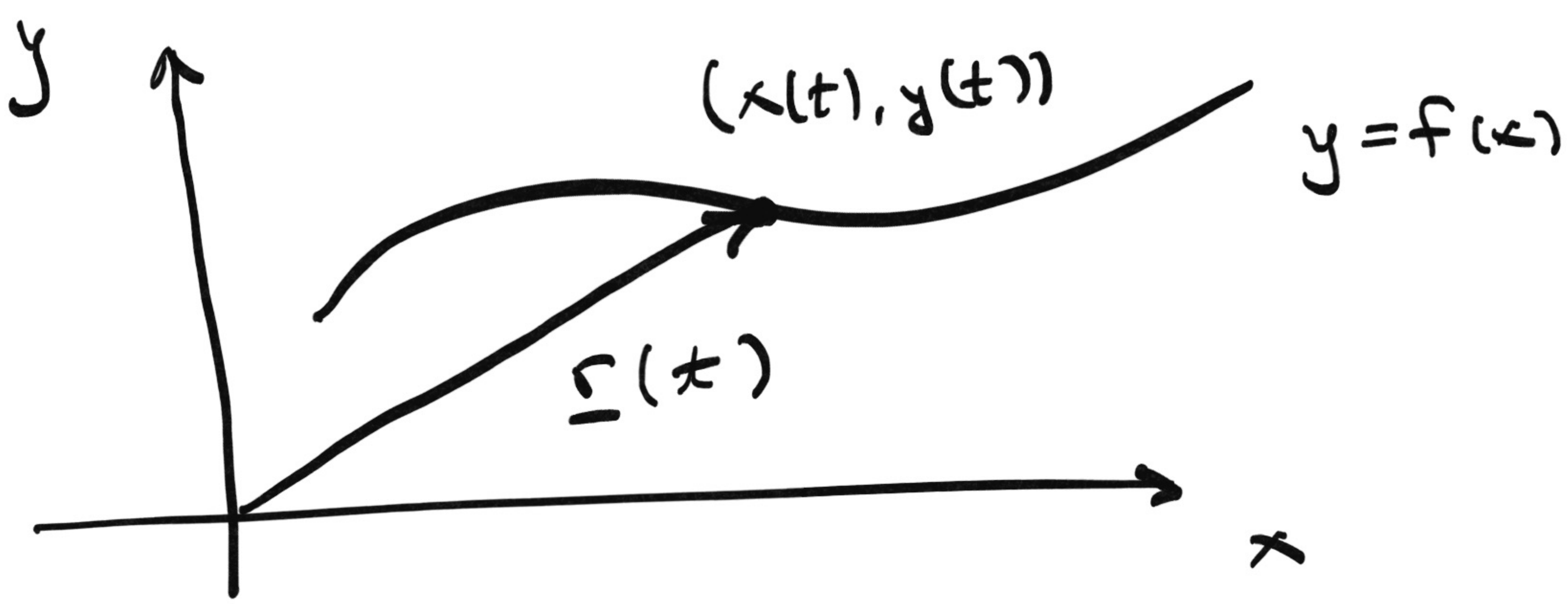
A0201

Parametrisoidut käyrät:

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Yksinkertaisin esimerkki: $y = f(x)$



Eräs parametrisaatio:

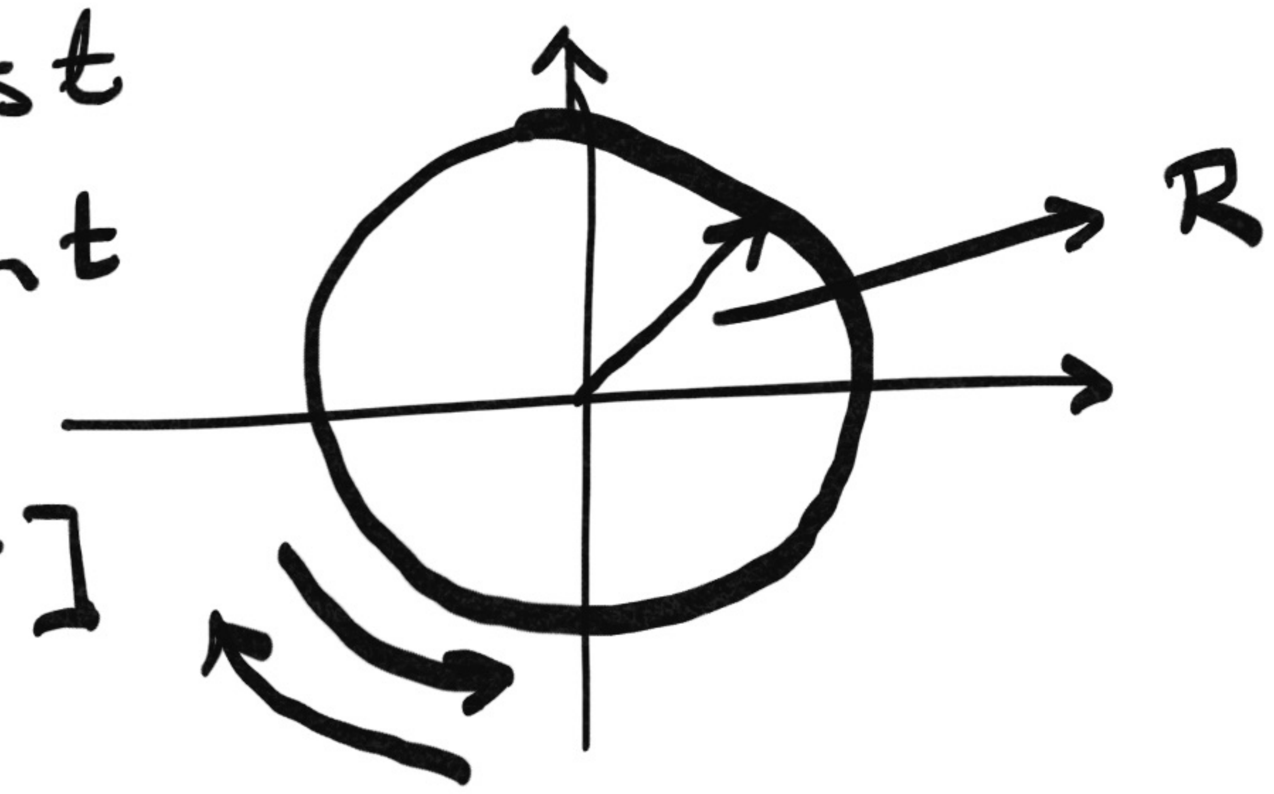
$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

Orientaatio:

Ympyrä

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi]$



Ympyrän pisteiden "piirtojärjestys" ei ole yksikäsitteinen, vaan riippuu parametrista.

Huomaa! Parametrin voi vaihtaa:

$$t \to -t$$

Implisiittinen muoto: $x^2 + y^2 = R^2$

Tasokäyrä: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$

Käyrän tangentti

$[t, t+\Delta t] \longrightarrow$ sekantti

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)$$

Intuitio: $\Delta t \to 0$, niin sekantti lähestyy tangenttia

Oikea skaalaus:

$$\underline{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

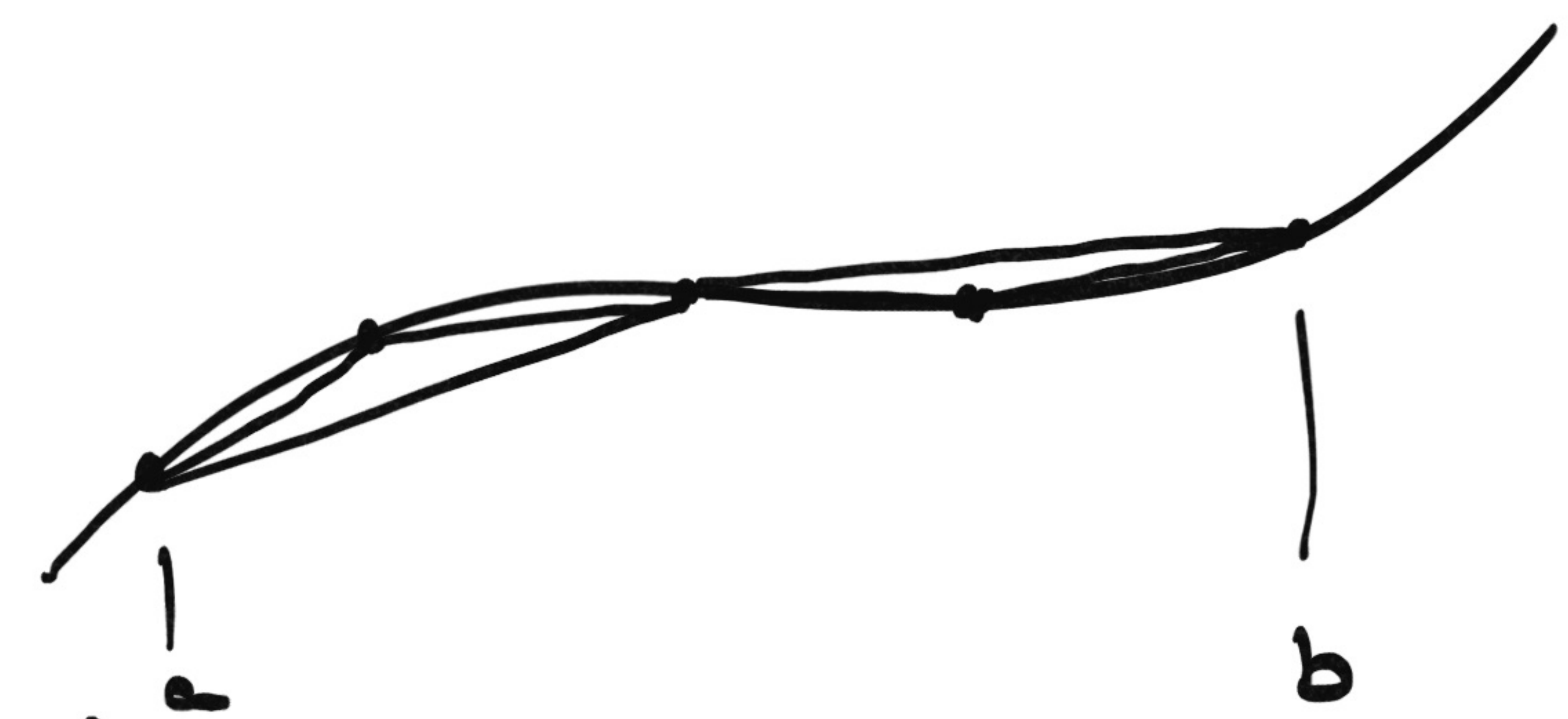
Kaava:

$$\underline{r}'(t) = x'(t)\,\underline{i} + y'(t)\,\underline{j} + z'(t)\,\underline{k}$$

Kaarenpituus

$\underline{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ käyrän C jatkuvasti derivoituva parametrisointi

Pituus $l(C)$:



$\underline{r}(t)$:

Approksimoidaan murtoviivalla!

Tihennetään jakoa, rajalla:

$$l(C) = \int_a^b \|\underline{r}'(t)\|\, dt$$

Helix – käyrän pituus

$$\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\underline{r}'(t) = -\sin t\, \underline{i} + \cos t\, \underline{j} + \underline{k}$$

$$\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$l = \int_0^{2\pi} \|\underline{r}'(t)\|\, dt = 2\sqrt{2}\,\pi$$

Huomaa! $y = f(x)$

$$\underline{r}(t) = t\, \underline{i} + f(t)\, \underline{j}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

Vaatii numeerista integrointia!