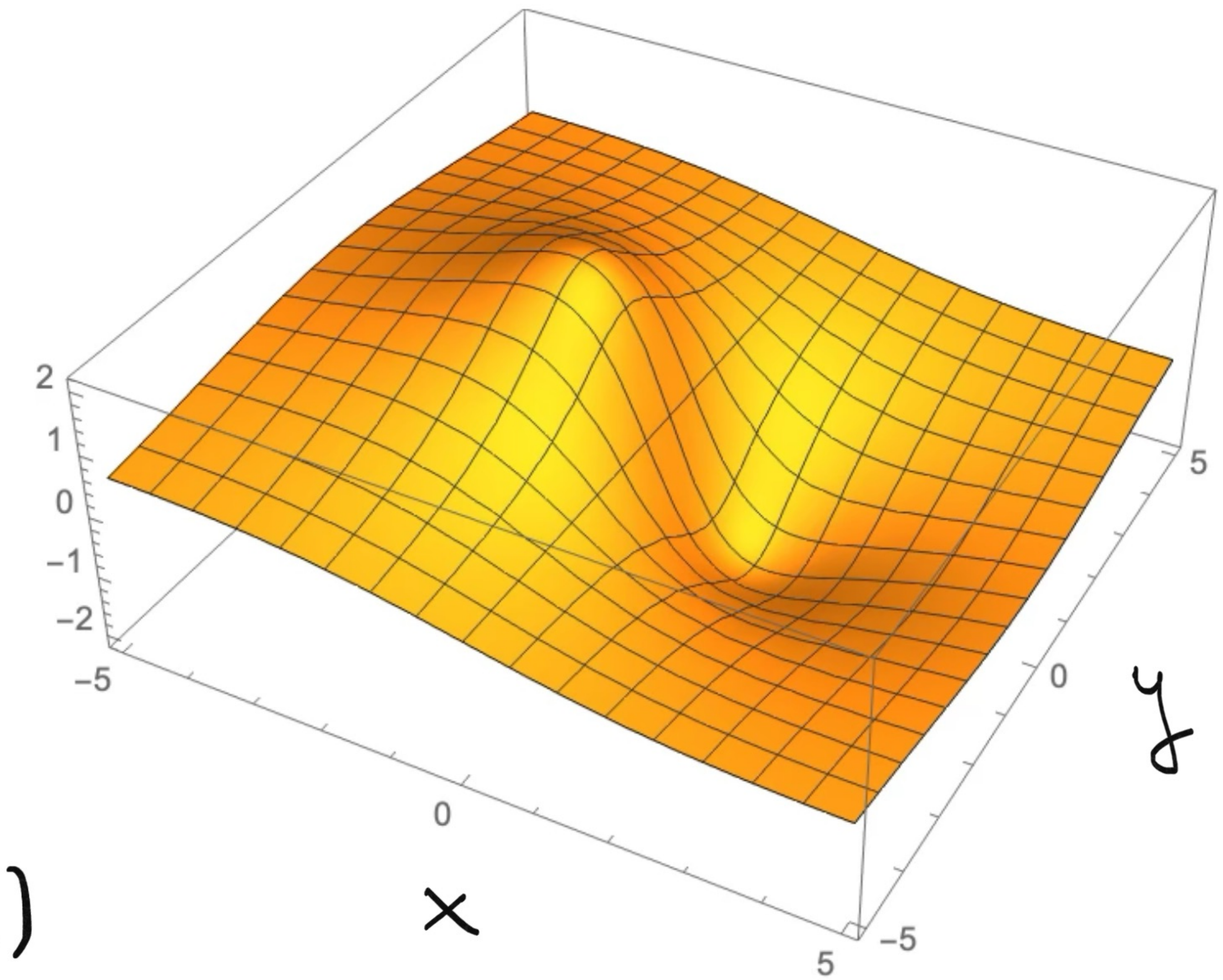
USEAN MUUTTUJAN FUNKTIOT

$$z = f(x,y) = -\frac{6x}{2+x^2+y^2}$$



$F: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

$z = f(x,y)$ on pinta.

Tässä f on skalaarisuure.

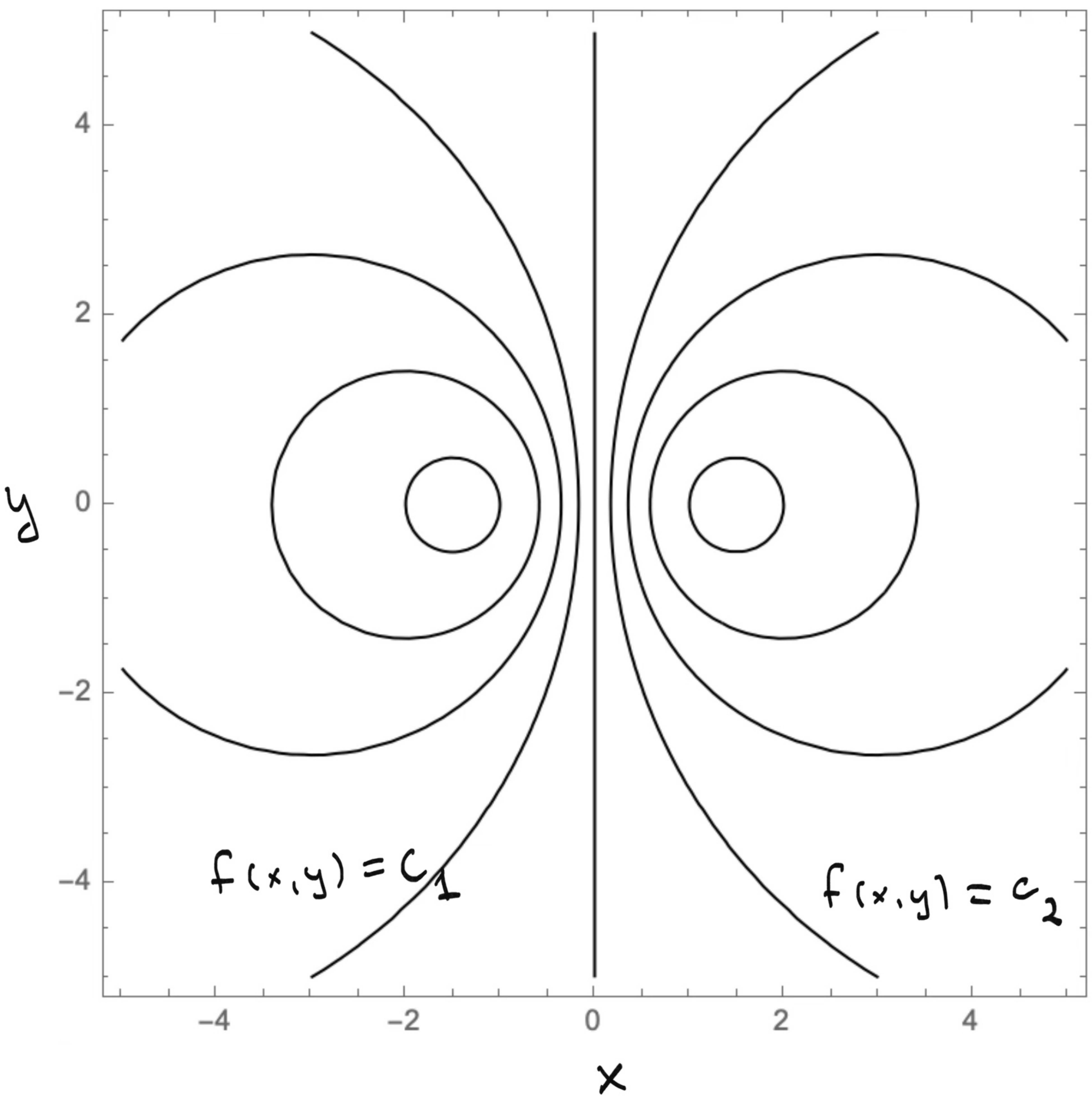
<u>Esimerkki</u> Luentosali

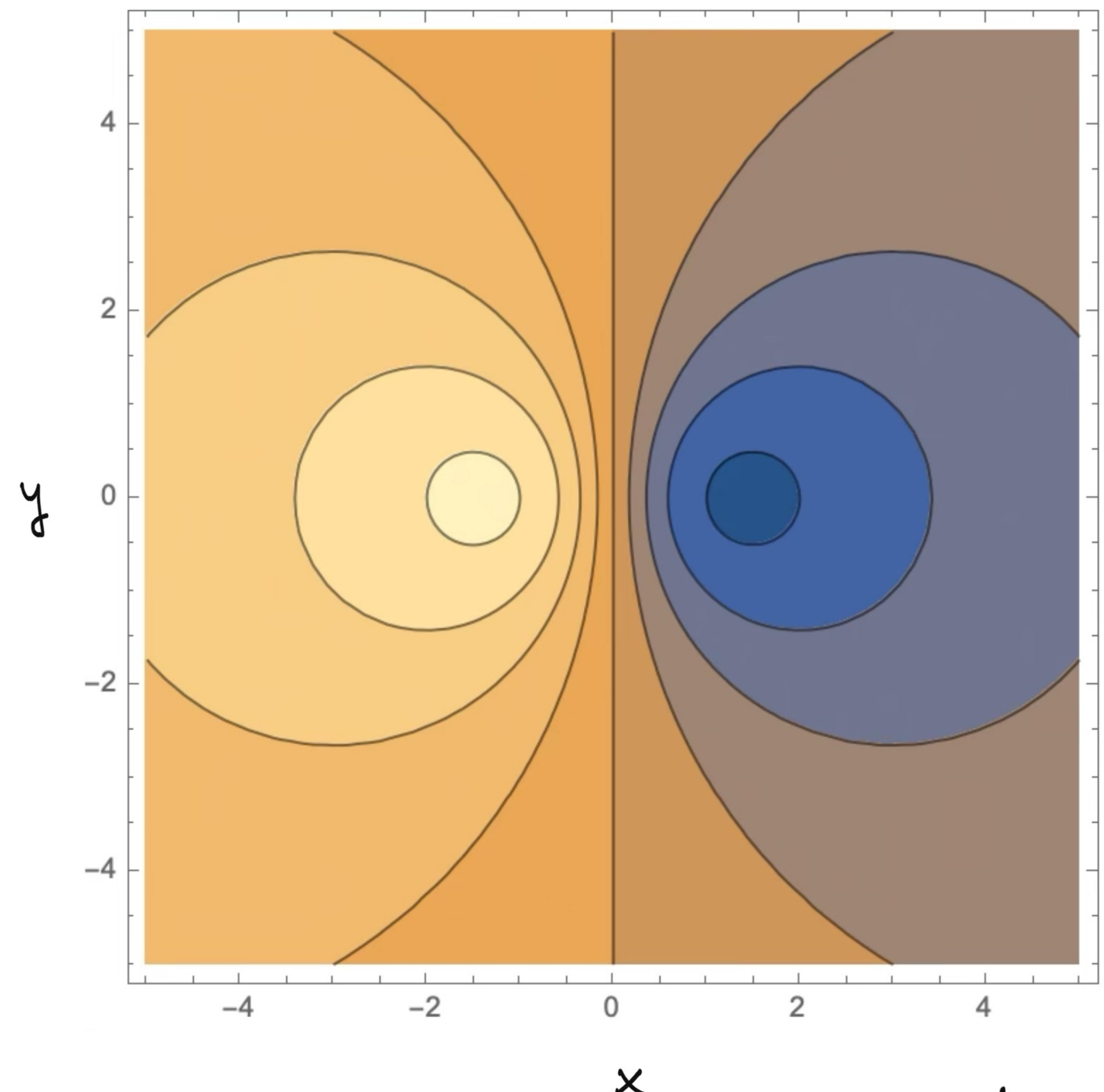
$T(x,y,z)$ = lämpötila (skalaari)

$W(x,y,z)$ = ilmavirtaus (vektori)

$= x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}$

TASA-ARVOKÄYRÄT





Tasa-arvokäyrät eivät kiinnitä funktiota!

Väritys tuo yhden dimension!

Tasa-arvokäyrät

Pinta $z = f(x, y)$:

tasa-arvokäyrä on pistejoukko

(x, y, C), missä

$C = f(x, y)$ on vakio.

Esimerkki $z = g(x, y)$; $z \geq 0$

Implisiittisesti : $x^2 + (y - z)^2 = 2z^2$

Asetetaan $z = g(x, y) = C$,

joten $x^2 + (y - C)^2 = 2C^2$

Ympyrä : kp $(0, C)$, säde $= \sqrt{2}\, C$

Kun $z \to \infty$:

(a) kp etääntyy origosta

(b) säde kasvaa

Raja-arvot ja jatkuvuus

Määritelmä (Raja-arvo)

$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$, jos

(i) $f(x, y)$ on määritelty jossakin pisteen (a, b) ympäristössä

(ii) kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $\delta = \delta(\varepsilon)$ s.e.

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

aina kun f on määritelty pisteessä (x, y) ja

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

Esimerkki

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

Onko funktiolla raja-arvo origossa?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \quad ?$$

Siis: $\left| f(x,y) - 0 \right| = \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right|$

1. arvio : $x^2 \leq x^2 + y^2$

$$= \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq |y|$$

2. arvio : $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$$= |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Formaalisti:

Olkoon $\varepsilon > 0$, joten valitaan $\delta = \varepsilon$, jolloin

$|f(x,y) - 0| < \varepsilon$, aina kun $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$.

Esimerkki

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} \; ; \; (x,y) \xrightarrow{?} (0,0)$$

Tarkastellaan kahta eri polkua:

(i) x-akseli : $\underline{r}_1(t) = t\,\underline{i}$

$$\lim_{t\to 0+} f(t,0) = \lim_{t\to 0+} \frac{2t\cdot 0}{t^2+0^2} = 0$$

(ii) Suora $y = x$:

$$\underline{r}_2(t) = t\,\underline{i} + t\,\underline{j}$$

$$\lim_{t \to 0+} f(t,t) = \lim_{t \to 0+} \frac{2t \cdot t}{t^2 + t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{2t^2}{2t^2} = 1$$

RR

<u>Jatkuvuus</u> $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$

Funktio $f : D \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva pisteessä x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$