MS-A0201
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
Luento 2: Usean muuttujan funktiot

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos[1]
Aalto-yliopisto

Kevät 2022

[1] Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

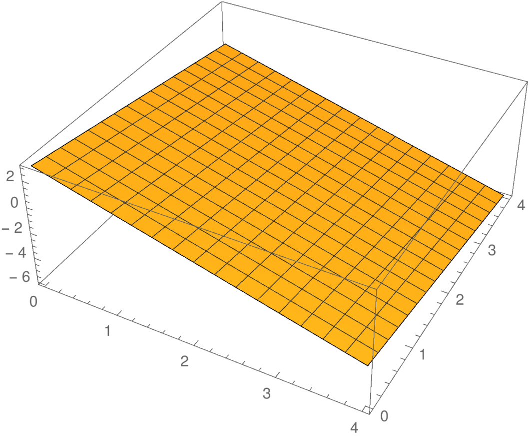
Usean muuttujan funktiot

- Usean muuttujan (reaaliarvoisella) funktiolla tarkoitetaan funktiota $f: D \to \mathbb{R}$, missä $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ on funktion määrittelyjoukko.
- Tällainen funktio siis liittää reaalisiin parametreihin $x_1, \ldots, x_n$ reaaliluvun $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Joskus (vars. fysiikassa) tällaista funktiota sanotaan skalaarikentäksi.
- **Esim.** Kaava $f(r, h) = \pi r^2 h$ määrittelee kahden muuttujan r, h funktion. Tämän funktion arvo on sylinterin tilavuus, kun r on sen säde ja h korkeus.

  Tähän sovellukseen liittyvä funktion määrittelyjoukko on tason I neljännes, $D = \{(r, h) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0,\ h \geq 0\}$.

  Funktion määräävä matemaattinen kaava on kuitenkin määritelty ja mielekäs kaikilla $(r, h) \in \mathbb{R}^2$, siis myös negatiivisilla luvuilla.

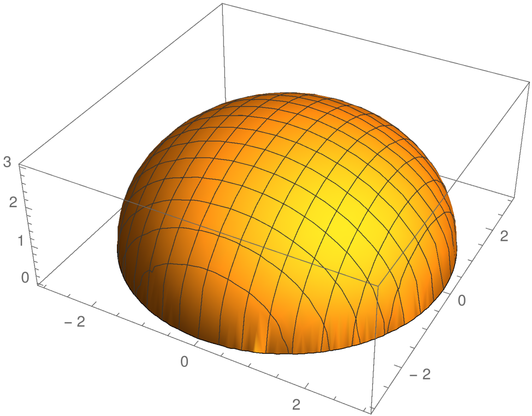
Esimerkki 1



Funktion kuvaaja $z = f(x, y)$, kun

$$f(x, y) = 3\left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right).$$

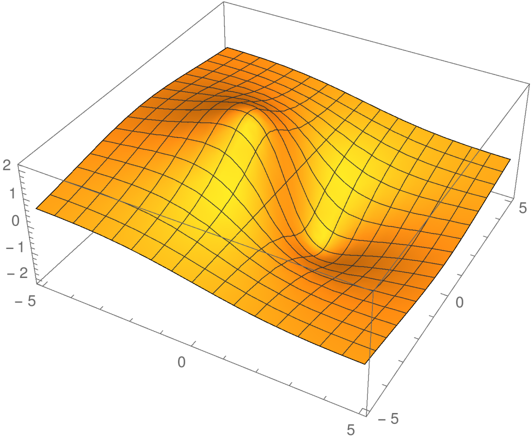
Esimerkki 2 (paikallinen maksimi)



Funktion kuvaaja $z = f(x, y)$, kun

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

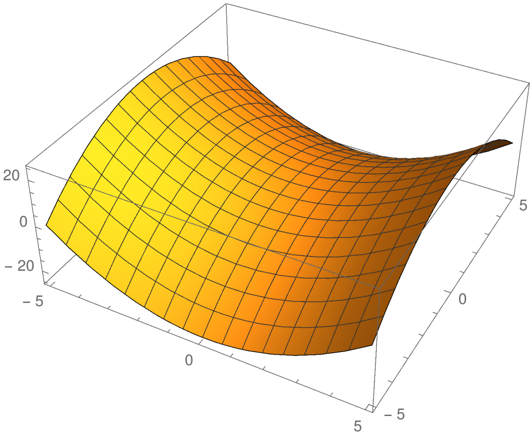
Esimerkki 3 (maksimi ja minimi)



Funktion kuvaaja $z = f(x, y)$, kun

$$f(x, y) = \frac{-6x}{2 + x^2 + y^2}.$$

Esimerkki 4 (satulapinta)



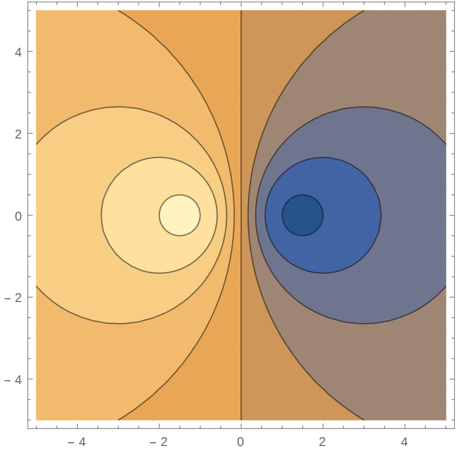
Funktion kuvaaja $z = f(x, y)$, kun

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Tasa-arvokäyrät

- Olkoon $c \in \mathbb{R}$ vakio, $D \subset \mathbb{R}^2$ ja $f : D \to \mathbb{R}$ funktio.
- Tällöin joukko $C = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$ on usein tasokäyrä.
- Kyseinen pistejoukko voi olla myös tyhjä (jos f ei saa arvoa c) tai vaikkapa koko taso (jos f on vakio).
- Mikäli joukko C on tasokäyrä, sitä sanotaan funktion f arvoon c liittyväksi tasa-arvokäyräksi.
- **Esim.** Korkeuskäyrät kartalla ovat tasa-arvokäyriä funkiolle, joka liittää kartalla olevaan pisteeseen (x, y) korkeuden meren pinnasta ko. pisteessä.
- Kolmiulotteisessa tapauksessa pistejoukot $S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$ ovat yleensä pintoja (eivät siis avaruuskäyriä).

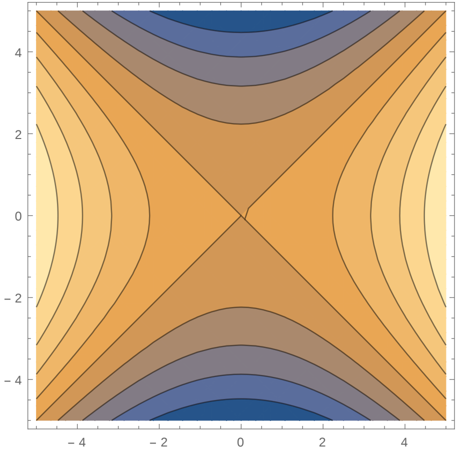
Esimerkki 5 (vrt. Esim. 3)



Funktion $z = f(x, y)$ tasa-arvokäyrät, kun

$$f(x, y) = \frac{-6x}{2 + x^2 + y^2}.$$

Esimerkki 6 (vrt. Esim. 4)



Funktion $z = f(x, y)$ tasa-arvokäyrät, kun

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Raja-arvo monen muuttujan tapauksessa

- Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ja $f \colon D \to \mathbb{R}$ funktio.
- Oletetaan lisäksi, että piste $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ on joukon D kasaantumispiste eli kaikilla $r > 0$ joukko $D \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| < r\}$ on epätyhjä.
- Tällöin sanotaan, että funktiolla f on raja-arvo L pisteessä $\mathbf{y}_0$ ja merkitään

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}_0} f(\mathbf{x}) = L, \quad \text{missä } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D,$$

jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $\delta = \delta(\varepsilon)$ siten, että $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$ aina, kun $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| < \delta$ ja $\mathbf{x} \in D$.

Laskusääntöjä

Olkoot $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\mathbf{y}_0$ joukon D kasaantumispiste ja $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ sellaisia funktiota, että $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}_0} f(\mathbf{x}) = L$ ja $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}_0} g(\mathbf{x}) = M$. Tällöin:

1. $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}_0} \big(f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})\big) = L \pm M.$$

2. $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}_0} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = LM.$$

3. $$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L}{M}, \text{ jos } M \neq 0.$$

4. Jos $L \in (a, b)$ ja $F \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä L, niin
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}_0} F\big(f(\mathbf{x})\big) = F(L).$$

Esimerkki 7

- $$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (2x - y^2) = 4 - 9 = -5.$$
- $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2 y = a^2 b.$$
- $$\lim_{(x,y)\to(\pi/3,2)} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

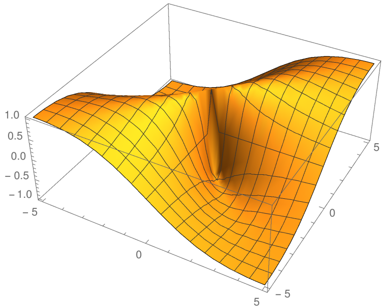
Raja-arvon tutkiminen käyrien avulla

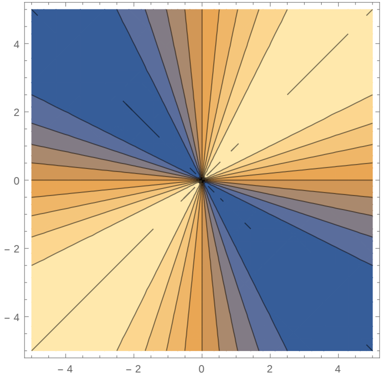
- Yhden muuttujan tapauksessa raja-arvoa tutkitaan yleensä oikean- ja vasemmanpuoleisen raja-arvon avulla.
- Tämä ajatus ei kuitenkaan toimi usean muuttujan tapauksessa, koska yleensä on olemassa äärettömän monta suuntaa (eli ko. pisteen kautta kulkevaa käyrää), joista pistettä y_0 voidaan lähestyä joukossa $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
- Mikäli kuitenkin on olemassa kaksi käyrää $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \colon [a, b] \to D \cup \{\mathbf{y}_0\}$, siten että $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(b) = \mathbf{y}_0$ mutta

$$\lim_{t \to b} f\big(\mathbf{r}_1(t)\big) \neq \lim_{t \to b} f\big(\mathbf{r}_2(t)\big),$$

  tai jompaa kumpaa kyseisistä raja-arvoista ei ole määritelty, niin tällöin funktiolla $f \colon D \to \mathbb{R}$ ei voi olla raja-arvoa pisteessä $\mathbf{y}_0$.

Esimerkki 8 1/2





Tutkitaan funktion $f(x,y)$ raja-arvoa pisteen $(0,0)$ ympäristössä, kun

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Esimerkki 8 2/2

- Jos pistettä $(0,0)$ lähestytään x-akselin suunnasta eli pitkin käyrää $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i}$, saadaan

$$\lim_{t \to 0^+} f(t,0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{2t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0.$$

- Toisaalta suoralla $x = y$, joka voidaan parametrisoida $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, saadaan

$$\lim_{t \to 0^+} f(t,t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{2t \cdot t}{t^2 + t^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2t^2}{2t^2} = 1.$$

- Näin ollen, funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $(0,0)$.

Esimerkki 9

- Tutkitaan funktion

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

  raja-arvoa pisteessä $(0, 0)$.

- Koska funktion arvo on 0 koordinaattiakseleille, raja-arvon on oltava 0 (jos se on olemassa). Itse asiassa kaikilla origon kautta kulkevilla suorilla $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + kt\mathbf{j}$ saadaan

$$f(t, kt) = \frac{2kt^3}{t^4 + k^2t^2} = \frac{2kt}{t^2 + k^2} \to 0, \text{ kun } t \to 0.$$

- Kuitenkin valinnalla $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ saadaan

$$\lim_{t \to 0} f(t, t^2) = \lim_{t \to 0} \frac{2t^4}{t^4 + t^4} = 1.$$

- Siten tällä funktiolla ei ole raja-arvoa origossa.

Esimerkki 10

- Osoitetaan, että
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$
- Käyttämällä epäyhtälöä $x^2 \le x^2 + y^2$ saadaan
$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|$$
$$\le |y| \le \sqrt{x^2+y^2} \to 0, \text{ kun } (x,y) \to (0,0).$$
- Formaalisti: Raja-arvon määritelmän ehto toteutuu, jos valitaan $\delta = \varepsilon$.

Jatkuvuus

- Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ja $\mathbf{x}_0 \in D$. Funktio $f\colon D \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0$, jos
$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$
- Funktio on jatkuva joukossa D, jos se on jatkuva jokaisessa joukon D pisteessä.