

MS-A0201  
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)  
Luento 3: Osittaisderivaatta

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos<sup>1</sup>  
Aalto-yliopisto

Kevät 2022

---

<sup>1</sup>Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

# Osittaisderivaatat

- Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  ja  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funktio.
- Tällöin kaikille  $j = 1, \dots, n$  funktion  $f$  osittaisderivaatta muuttujan  $x_j$  suhteen on

$$f_j(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

jos kyseinen raja-arvo on määritelty. Tässä  $\mathbf{e}_j$  on  $j$ :s yksikkökantavektori.

- Käytännössä osittaisderivointi jonkin muuttujan suhteen tapahtuu samaan tapaan kuin yhden muuttujan tapauksessa, muistetaan vain pitää muita muuttujia ikään kuin ne olisivat vakioita.

# Esimerkki 1

- Olkoon funktio  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 \sin y.$$

- Sen osittaisderivaatat ovat:

$$f_1(x, y) = 2x \sin y$$

ja

$$f_2(x, y) = x^2 \cos y.$$

## Merkintätavat osittaisderivaatoille

- Funktion  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  osittaisderivaattaa muuttujan  $x_j$  suhteen merkitään mm. seuraavilla tavoilla

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_n)$$

$$= f_j(x_1, \dots, x_n) = D_j f(x_1, \dots, x_n).$$

- Tapauksessa  $n = 2$  usein kirjoitetaan  $z = f(x, y)$ , jolloin voidaan myös käyttää merkintöjä

$$f_1(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

- Osittaisderivaatalle käytetään erillistä symbolia, jotta se ei sekoittuisi tavalliseen (n.k. kokonais)derivaattaan. Palaamme tähän ketjusäännön yhteydessä.

## Osittaisderivaatan arvo

- Funktion  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  osittaisderivaatan  $f_j$  arvoa pisteessä  $\mathbf{x}_0 \in D$  merkitään

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial z}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} \\ &= f_j(\mathbf{x}_0) = D_j f(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

jossa muuttuja  $z$  määritellään  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

- **Esim.** Jos  $f(u, v) = u^2v$  ja  $\mathbf{w} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ , niin

$$\begin{aligned}f_1(\mathbf{w}) &= f_1(x^2, xy) = \left( \frac{\partial}{\partial u} f(u, v) \right) \Big|_{(x^2, xy)} \\ &= 2uv \Big|_{u=x^2, v=xy} = 2(x^2)(xy) = 2x^3y.\end{aligned}$$

## Esimerkki 2

- Etsitään

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y},$$

kun  $z = x^3y^2 + x^4y + y^4$ .

- Saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 4y^3.$$

## Esimerkki 3

- Etsitään  $f_1(0, \pi)$ , kun  $f(x, y) = e^{xy} \cos(x + y)$ .
- Saadaan

$$f_1(x, y) = ye^{xy} \cos(x + y) - e^{xy} \sin(x + y).$$

- Siten

$$f_1(0, \pi) = \pi e^0 \cos(\pi) - e^0 \sin(\pi) = -\pi.$$

# Ketjusäännön soveltaminen

- Tavallisiin derivaattoihin liittyvä ketjusääntö

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

on voimassa myös osittaisderivaattojen tapauksessa.

- Esimerkiksi jos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , niin

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y)) = f'(g(x, y))g_1(x, y)$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial y} f(g(x, y)) = f'(g(x, y))g_2(x, y).$$

- Myöhemmin esitetään myös ketjusääntö monen muuttujan funktioille.



## Esimerkki 4

- Osoitetaan, että derivoituva funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa seuraavan osittaisdifferentiaaliyhtälön, kun  $z = f(x/y)$ :

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

- Ketjusäännön perusteella

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f' \left( \frac{x}{y} \right) \left( \frac{1}{y} \right) \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y} = f' \left( \frac{x}{y} \right) \left( \frac{-x}{y^2} \right).$$

- Siten

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = f' \left( \frac{x}{y} \right) \left( x \cdot \frac{1}{y} + y \cdot \frac{-x}{y^2} \right) = 0.$$

## Pinnan tangentit ja normaali

- Yhden muuttujan tapauksessa derivaatan avulla voidaan löytää lauseke derivoituvan funktion tangentille annetussa pisteessä. Normaali on kohtisuorassa tangenttia vastaan.
- Pinnalle  $z = f(x, y)$  saadaan kaksi tangenttivektoria pisteessä  $(a, b)$ :

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b)\mathbf{k} \text{ ja } \mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b)\mathbf{k}.$$

Piirrä kuva, josta selviää miksi näin on!

- Pinnan normaalivektori  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(a, b)$  on kohtisuorassa näitä molempia tangentteja vastaan. Siksi se saadaan ristitulona

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_2(a, b) \\ 1 & 0 & f_1(a, b) \end{vmatrix}$$

$$= f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Mikä on yksikkönormaali?

# Tangenttitaso

- Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $(a, b) \in D$ .
- Pinnan  $z = f(x, y)$  tangenttitaso pisteessä  $(a, b)$  on aina (i) kohtisuorassa normaalia  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(a, b)$  vastaan, ja se (ii) kulkee pisteen  $P = (a, b, f(a, b))$  kautta.
- Tällaisen tason vektorit  $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  toteuttavat yhtälön  $(\mathbf{r} - P) \cdot \mathbf{n} = 0$ . Piirrä kuva, jotta selviää miksi!
- Tangenttitasolle saadaan siis yhtälö

$$z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

# Normaalisuoran yhtälöt

- Normaalisuora pinnalle  $z = f(x, y)$  pisteessä  $P = (a, b, f(a, b))$  on normaalivektorin  $\mathbf{n}(a, b) = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}$  suuntainen.
- Suoran pisteet ovat siis pistejoukko

$$\{P + t\mathbf{n}(a, b) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Piirrä kuva, jotta selviää miksi!

- Jos sekä  $f_1(a, b) \neq 0$  ja  $f_2(a, b) \neq 0$ , niin voidaan eliminoida parametri  $t$  ja saadaan yhtälöt

$$\frac{x - a}{f_1(a, b)} = \frac{y - b}{f_2(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}.$$

## Esimerkki 5 1/2

- Etsitään tangentti ja normaali pinnalle  $z = \sin(xy)$ , kun  $x = \pi/3$  ja  $y = -1$
- Tangentti ja normaali kulkevat pisteen  $(\pi/3, -1, -\sqrt{3}/2)$  kautta.
- Lasketaan osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy) \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy).$$

- Pisteessä  $(\pi/3, -1)$  saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\pi}{6}.$$

## Esimerkki 5 2/2

- Siten kyseisellä pinnalla on normaalivektori

$$\mathbf{n} = -(1/2)\mathbf{i} + (\pi/6)\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

- Tangenttitaso on

$$z = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6}(y + 1).$$

- Normaalisuoran yhtälöiksi saadaan

$$\frac{6x - 2\pi}{-3} = \frac{6y + 6}{\pi} = \frac{6z + 3\sqrt{3}}{-6}.$$

# Korkeammat osittaisderivaatat

- Funktiolle  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  voidaan määritellä myös korkeampia osittaisderivaattoja.
- Jos  $z = f(x, y)$ , niin saadaan esimerkiksi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x, y)$$

ja

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x, y).$$

- Vastaavasti, jos  $w = f(x, y, z)$ , saadaan esimerkiksi

$$\frac{\partial^5 w}{\partial y \partial x \partial y^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} = f_{32212}(x, y, z).$$

## Esimerkki 6

- Etsitään funktion  $f(x, y) = x^3y^4$  toiset osittaisderivaatat.
- Saadaan aluksi

$$f_1(x, y) = 3x^2y^4 \quad f_2(x, y) = 4x^3y^3.$$

- Siten

$$f_{11}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} 3x^2y^4 = 6xy^4, \quad f_{21}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} 4x^3y^3 = 12x^2y^3,$$

$$f_{12}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2y^4 = 12x^2y^3, \quad f_{22}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} 4x^3y^3 = 12x^3y^2.$$