KETJUSÄÄNNÖT

Korkeammat osittaisderivaatat:

$z = f(x,y)$:

ns. sekaderivaatta :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x,y)$$

tavallinen toinen derivaatta:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x,y)$$

KETJUSÄÄNTÖ :

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Pinta: $z = f(x,y)$

Parametrisointi:

$$(1) \quad \left.\begin{aligned} x &= u(t) \\ y &= v(t) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad z = f(u(t), v(t)) = g(t)$$

Voidaan laskea derivaatta $g'(t)$.

Erotusosamäärä :

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{h}$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

Saadaan derivaatta:

$$g'(t) = f_1(u(t), v(t))\, u'(t) + f_2(u(t), v(t))\, v'(t)$$

Toisella notaatiolla:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Huomautus:

Oletetaan jatkuvasti, että kaikki parametrisoidut funktiot ovat jatkuvasti derivoituvia.

Entä jos:

$z = f(x, y);\quad \begin{cases} x = u(s,t) \\ y = v(s,t) \end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

On kuitenkin mahdollista, että fysikaalisessa systeemissä parametrisoinnit eivät ole vakiomuotoisia.

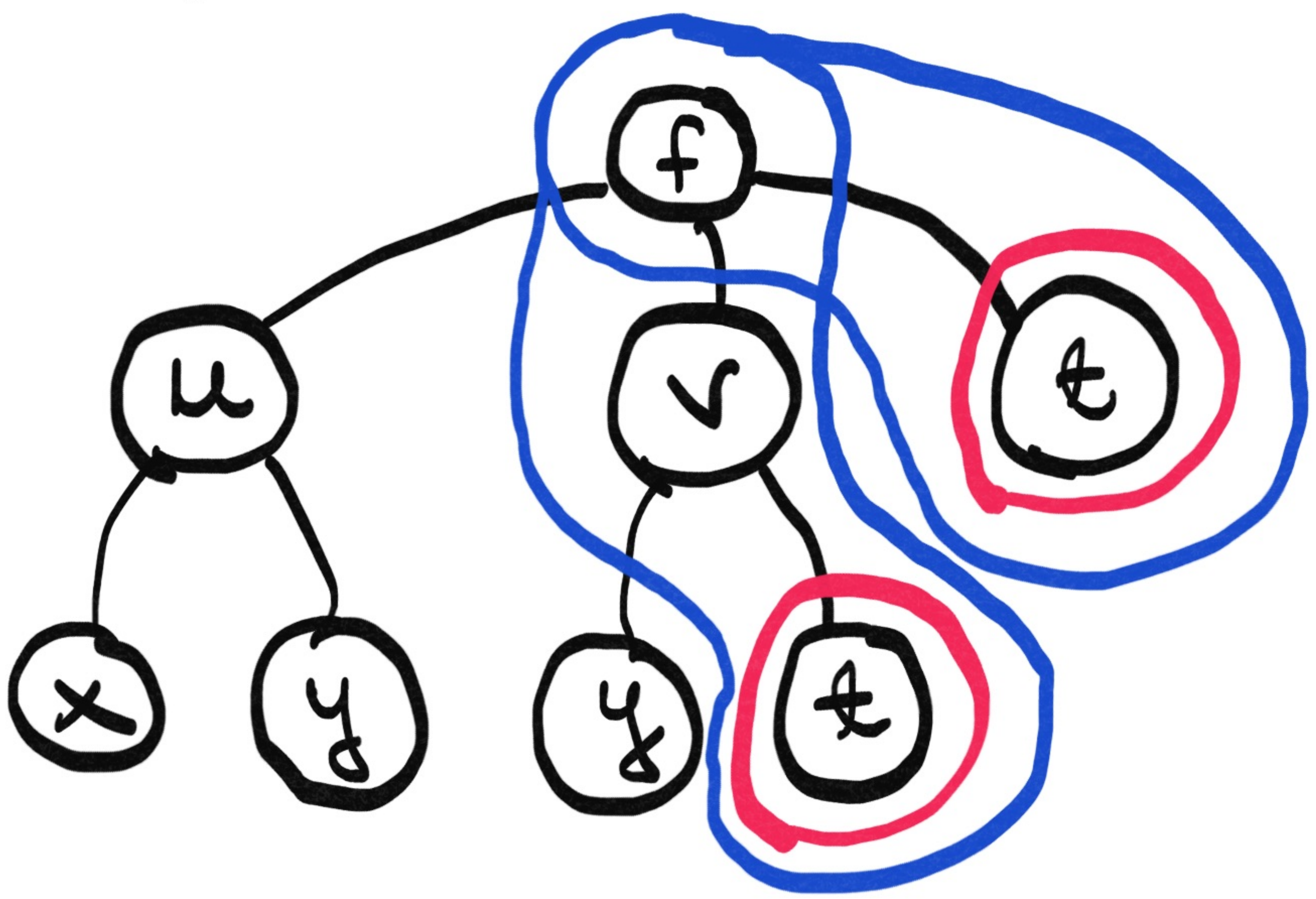
Yleisempi tapaus:

(1) $z = f(u, v, t)$

Parametrisointi:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(y, t) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = ?$$



Taso:

0

1

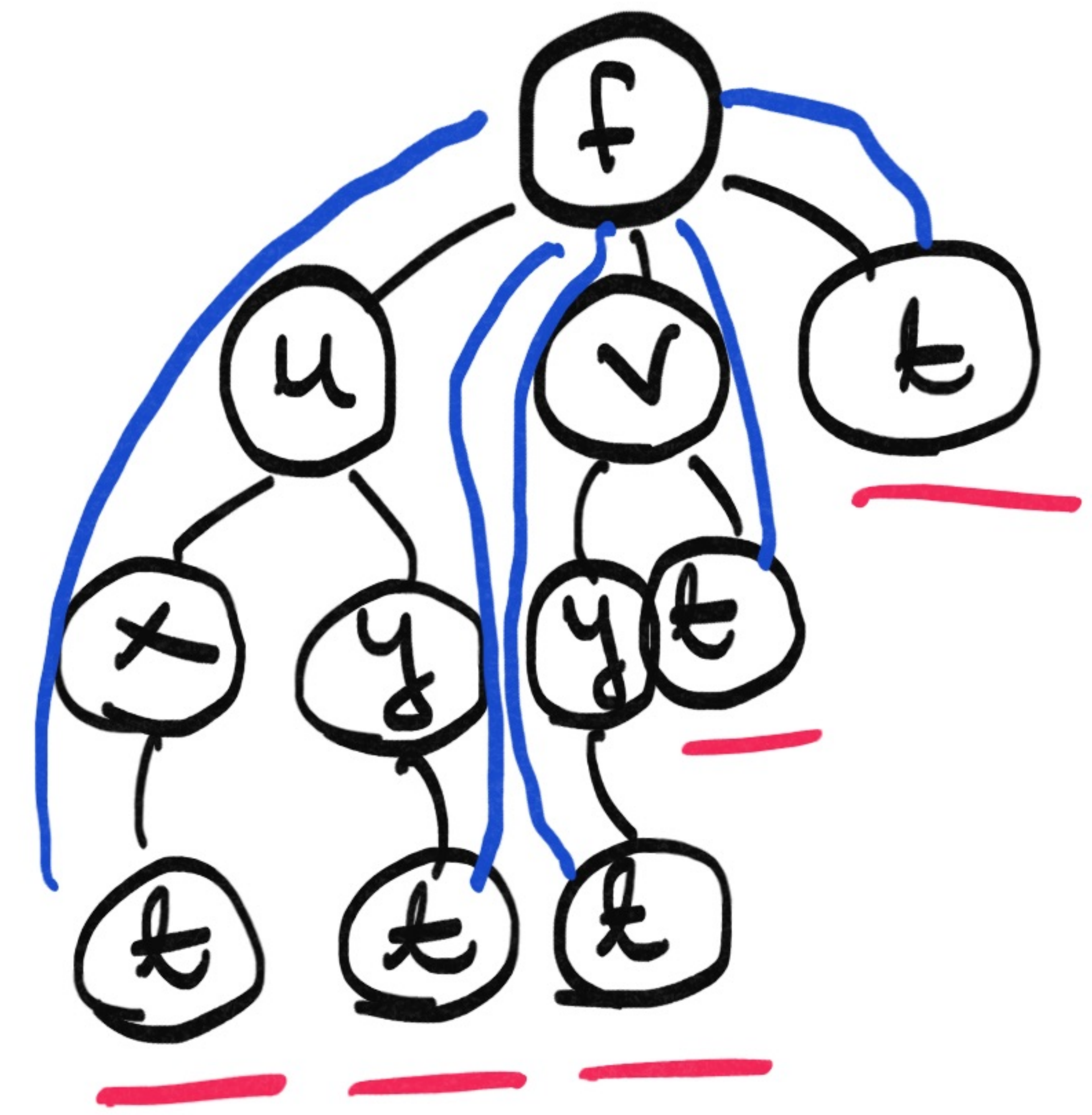
2

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

(2) $z = f(u(x(t), y(t)), v(y(t), t), t)$

$$\frac{dz}{dt} = ?$$



Tasoja: 3 kpl

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Näin siksi, että itse asiassa $z = g(t)$!

LINEAARISET APPROKSIMAATIOT

Tangenttitaso: piste (a, b)

$$f(x,y) \simeq L(x,y) =$$

$$f(a,b) + f_1(a,b)(x-a)$$

$$+ f_2(a,b)(y-b)$$

__Esimerkki__ $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$

Linearisoidaan pisteessä $(2,0)$

Tarkastellaan " $(2.2, -0.2)$

$$f(2,0) = 3$$

$$f_1(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \quad ; \quad f_1(2,0) = \frac{4}{3}$$

$$f_2(x,y) = \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2+e^{2y}}} \quad ; \quad f_2(2,0) = \frac{1}{3}$$

$$L(x,y) = 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}y$$

$$f(2.2, -0.2) \simeq L(2.2, -0.2) = 3.2$$

"Tarkka" 3.2172

__Huomautus:__

Osittaisderivaattojen olemassaolo ei takaa funktion jatkuvuutta!

DIFFENTIOITUVUUS

__Määritelmä__ $f(x,y)$ on differentioituva pisteessä (a,b), jos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - L(a+h, b+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

__Lause__ Jos osittaisderivaatat ovat jatkuvia (a,b):n ympäristössä, on f differentioituva.

Esimerkki $f(x,y) = x^3 + xy^2$

Differentioituvuus:

$$(x+h)^3 + (x+h)(y+k)^2$$
$$- (x^3 + xy^2)$$
$$- (3x^2 + y^2)h$$
$$- 2xyk$$

$$= 3xh^2 + h^3 + 2y\underline{\underline{hk}}$$
$$+ hk^2 + xk^2$$

Erotus on luokkaa $h^2 + k^2$

eli $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \cdots = 0$.

DIFFERENTIAALI

Funktion arvon muutos Δf:

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$$
$$- f(x_1, \ldots, x_n)$$

Linearisoidaan:

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Differentiaali df:

$$dz = df$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Pätee: $\dfrac{\Delta f - df}{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}} \xrightarrow{\Delta x_i \to 0} 0$