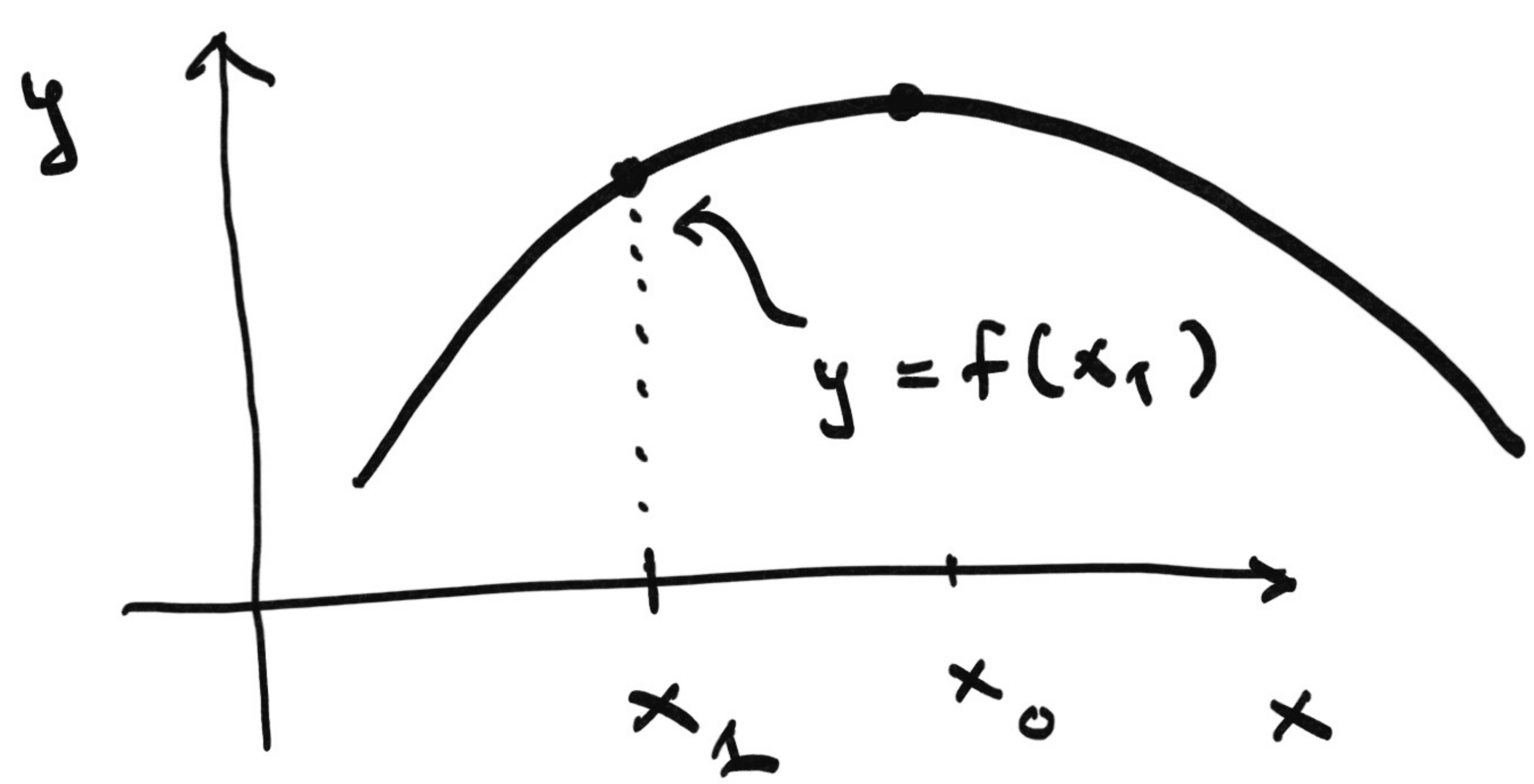
RAJOITEOPTIMOINTI

ELI KUINKA IHASTUIN LAGRANGEN KERTOIMIIN...



Rajoite 1D:ssä ei johda mielekkääseen tehtävään.

Satula: $z = f(x,y) = x^2 - y^2$

Rajoite- tai sidosoptimointi:

Lisäehto: $g(x,y) = 0$

Uusi tehtävä:

Minimoi $f(x,y)$ ehdolla $g(x,y) = 0$.

Esimerkki (Satula)

Rajoitusehto: $y = 0$

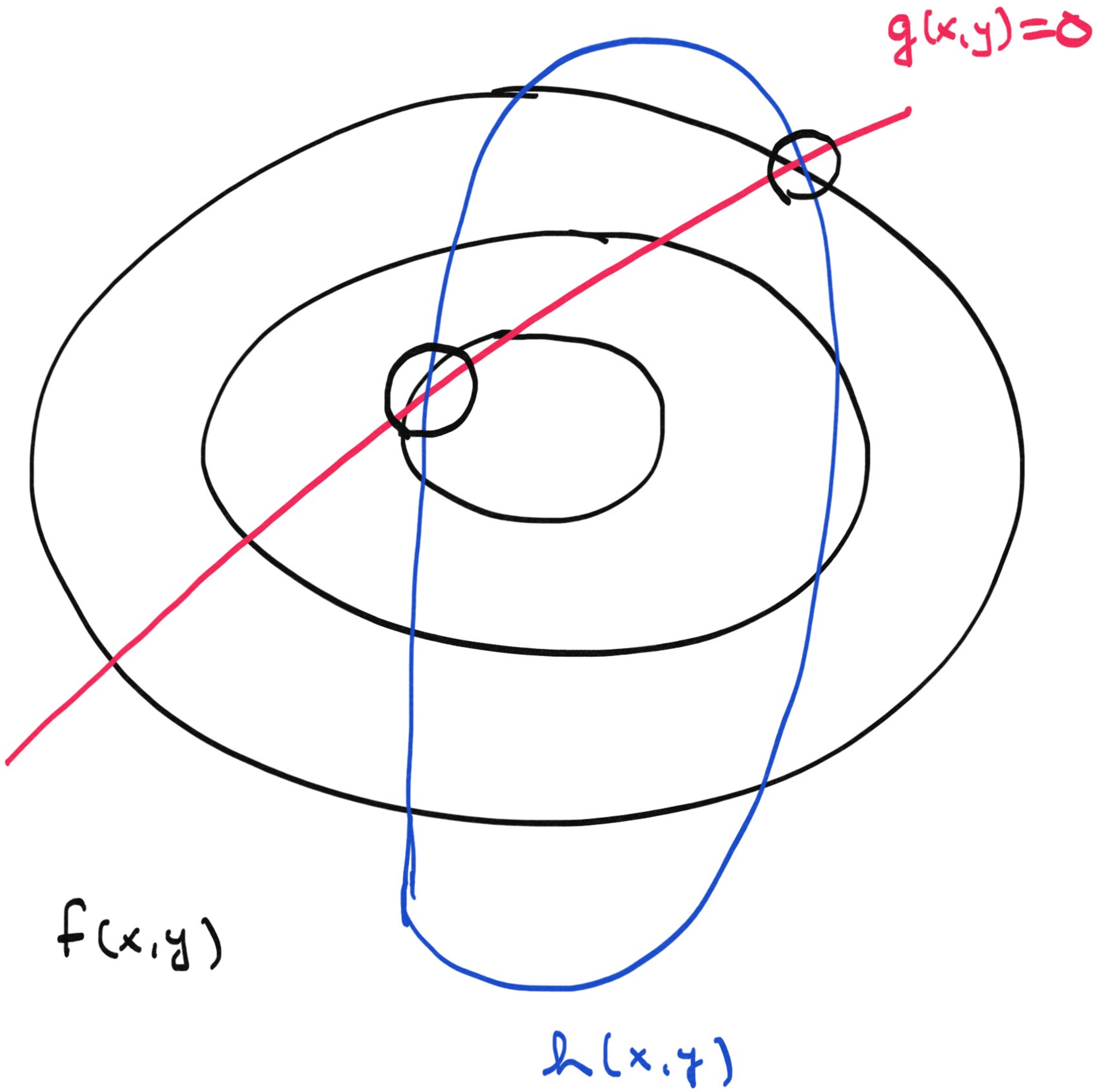
Rajoittuma:

$$F(x, g(x,y)) = F(x,0) = x^2$$

Lokaali minimi, kun $x = 0$.

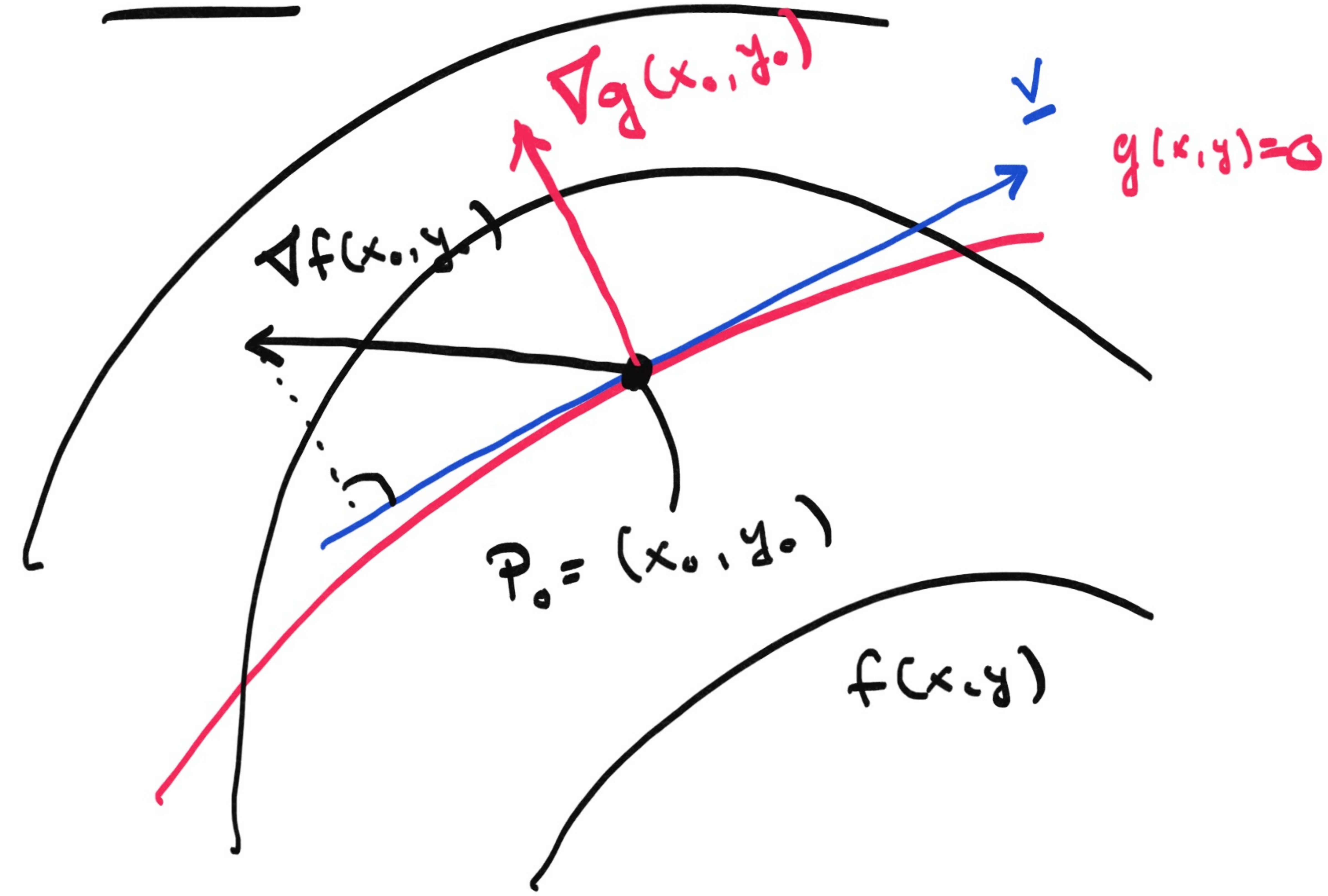
(Kokeile: $x = 0$)

Yleiskuva



Huomaa!
Rajoitusehtoja voi olla useita.

Zoom



$\nabla g(x_0,y_0) \neq \underline{0}$

$\nabla f(x_0,y_0)$:n kohtisuora projektio $\underline{v}$:lle $\neq \underline{0}$ eli funktion $f(x,y)$:n arvon muutoksella on eri merkki kuljettaessa $\underline{v}$:tä pitkin.

$\Rightarrow$ ääriarvoa <u>ei voi</u> olla

Geometrinen havainto (mahdolliselle) ääriarvolle:

$$\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0)$$

On siis olemassa reaalinen λ_0 s.t.

$$\nabla f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

Kriittiselle pisteelle:

$$\nabla (f + \lambda_0 g)(x_0, y_0) = \underline{0}$$

On saatu ns. Lagrangen funktio

$$L(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Kriittiselle pisteelle:

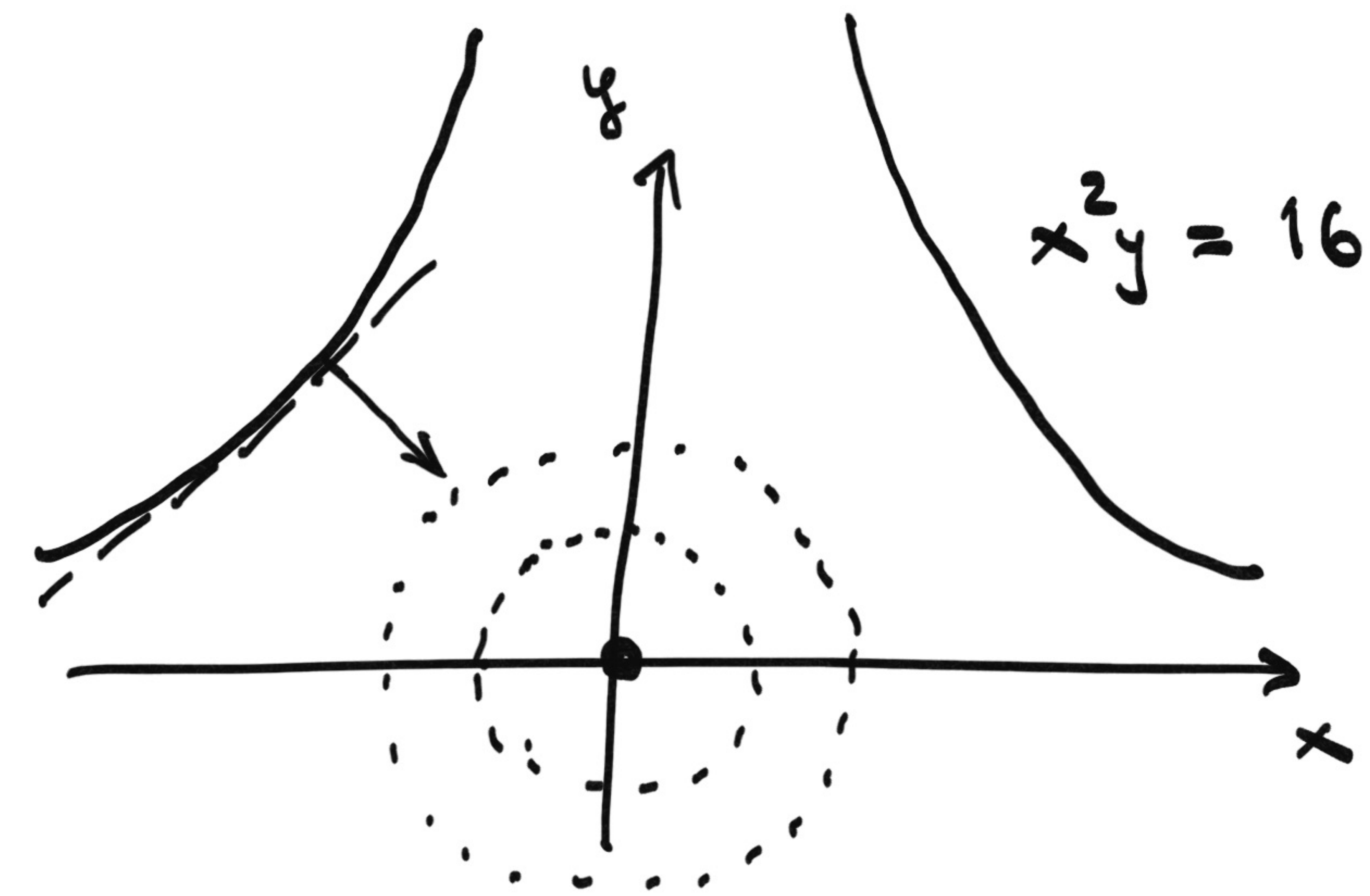
$$\frac{\partial L}{\partial x} = f_1(x,y) + \lambda g_1(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = f_2(x,y) + \lambda g_2(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x,y) = 0$$

Esimerkki

Määritä lyhin etäisyys origosta käyrälle $x^2 y = 16$.



Tehtävä:

Minimoi $f(x,y) = x^2 + y^2$

ehdolla $g(x,y) = x^2 y - 16 = 0$

Lagrange:

$$L(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$
$$= x^2 + y^2 + \lambda(x^2 y - 16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2xy\lambda$$
$$= 2x(1+\lambda y) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda x^2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 y - 16 = 0 \qquad (3)$$

(1): $x = 0$ tai $\lambda y = -1$

$\hookrightarrow$ (3): $-16 = 0$ RR

(2): $0 = 2y + \lambda x^2 \quad | \cdot y$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 + \underbrace{\lambda y}_{=-1} x^2$$

$$= 2y^2 - x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\, y$$

(3) $2y^3 = 16 \Rightarrow y = 2$

Kaksi ratkaisua: $(\pm\sqrt{2}\,2, 2)$

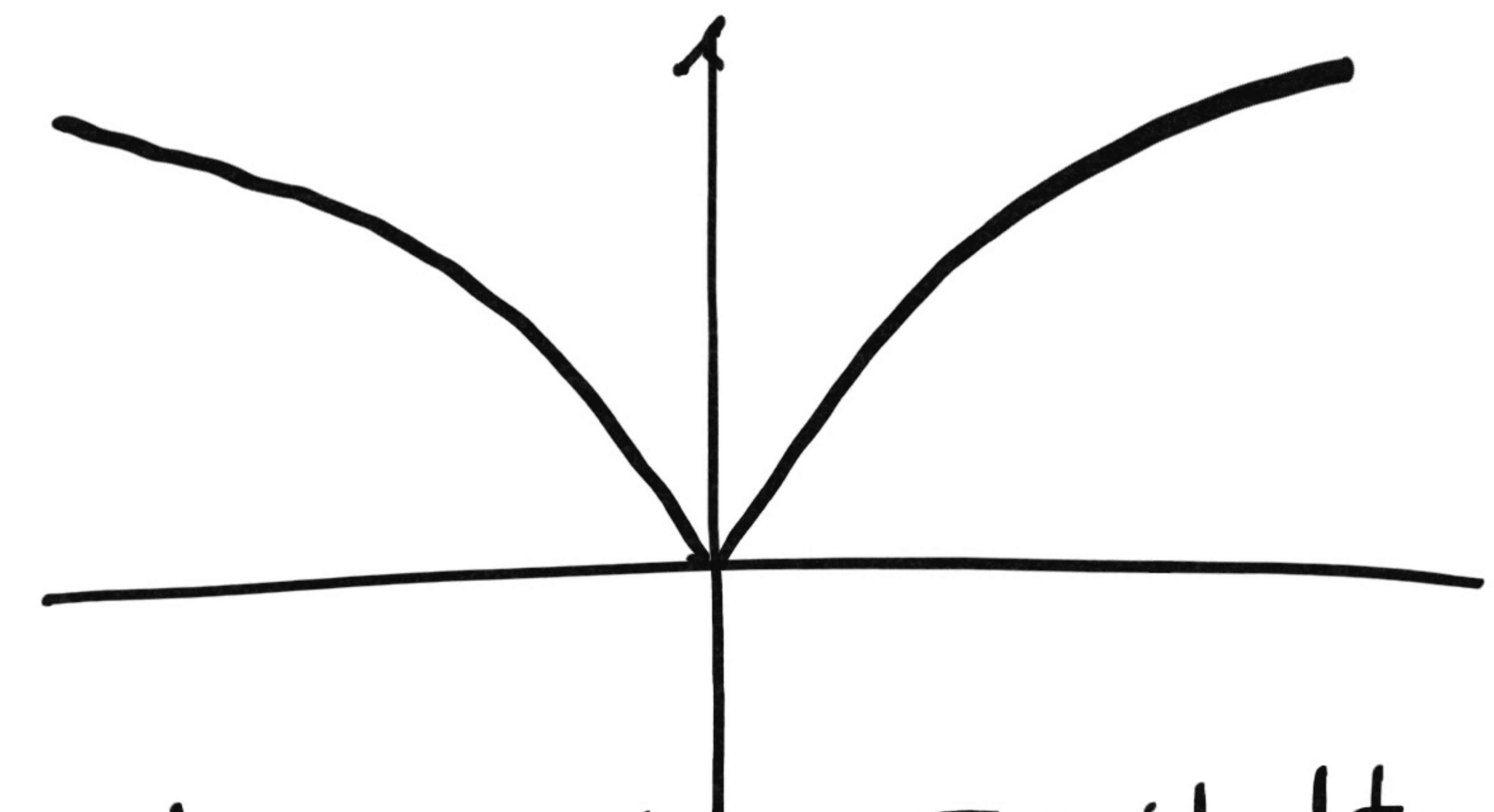
Kysytty etäisyys: $2\sqrt{3}$

Esimerkki

Minimoi $f(x,y) = y$

ehdolle $g(x,y) = y^3 - x^2 = 0$

$y^3 = x^2$:



Tangenttia ei ole määritelty origossa!

$f(x,y)$:llä on minimi origossa.

Lagrange: $L(x,y,\lambda) = y + \lambda(y^3 - x^2)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\lambda x = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y^3 - x^2 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 3\lambda y^2 = 0$

$\longrightarrow y = 0$ ei toteuta

$\longrightarrow$ EI RATKAISUA LAGRANGELLA

Synteesi:

Ääriarvo voi olla

(i) Lagrangen funktion kriittinen piste

(ii) piste $\nabla g = \underline{0}$

(iii) piste, jossa joko ∇f tai ∇g ei ole määritelty

(iv) rajoitusehdon määräämän pistejoukon reunalla

Mitä, jos rajoitusehtoja on useita?

Minimoi $f(x,y,z)$

ehdoille $g(x,y,z) = 0$

ja $h(x,y,z) = 0$

Lagrange:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$