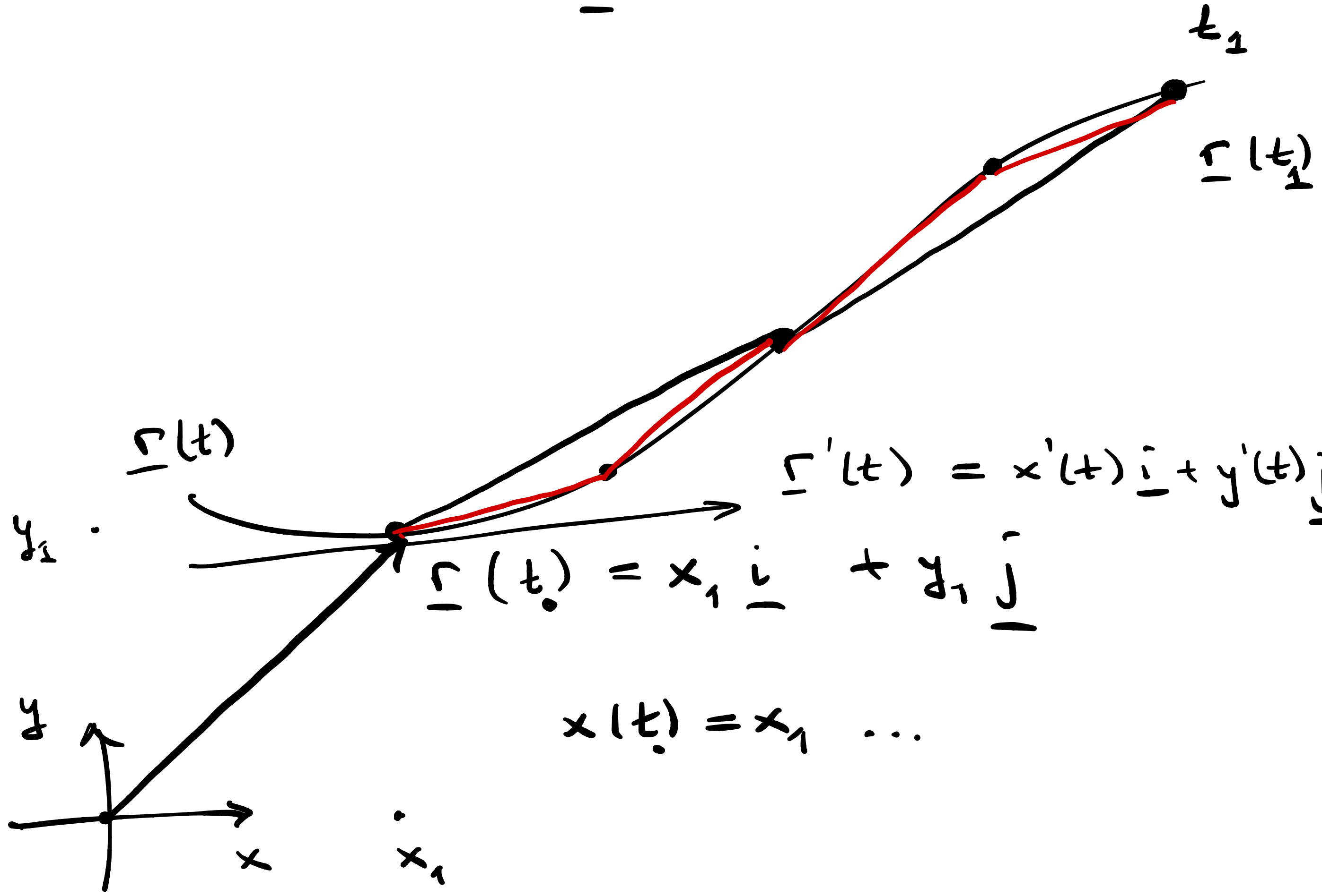
Parametrisoidut käyrät :

$$\underline{r}(t) = x(t)\,\underline{i} + y(t)\,\underline{j} \quad : \quad \underline{r} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$



$$\underline{r}'(t) = x'(t)\,\underline{i} + y'(t)\,\underline{j}$$

$$\underline{r}(t_0) = x_1\,\underline{i} + y_1\,\underline{j}$$

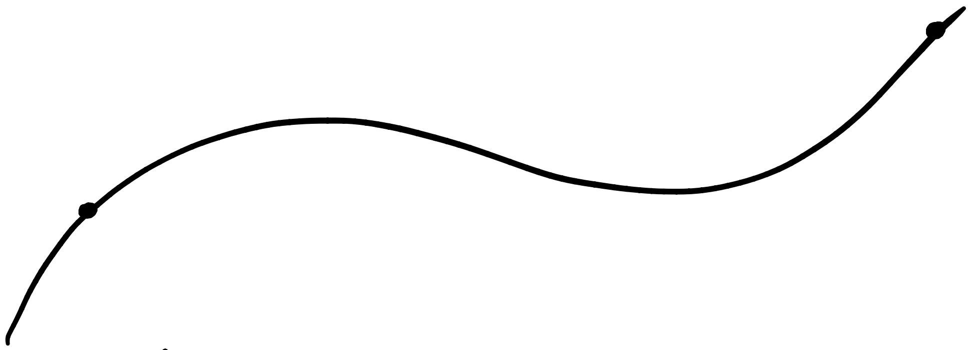
$$x(t_0) = x_1 \quad \ldots$$

Käyrän pituudesta:
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \| \underline{r}_i - \underline{r}_{i-1} \|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t_i} \right\| \Delta t_i$$

$$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta t_i \to 0}} s_n = \int_a^b \| \underline{r}'(t) \| \, dt$$

Käyrän pituus parametrina:



$a = t_0$ $b = t_n$

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \| \underline{r}'(\tau) \| \, d\tau$$

Kun $t = t_0 \Rightarrow s = 0$

Esimerkki $\underline{r} = a \cos t \, \underline{i} + a \sin t \, \underline{j} + bt \, \underline{k}$

$$s = s(t) = \int_{0}^{t} \sqrt{a^2 + b^2} \, d\tau = \sqrt{a^2 + b^2} \, t$$

alkupiste : $(a, 0, 0)$

Valitaan $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

USEAN MUUTTUJAN FUNKTIOT

Tarkastellaan kuvauksia $F: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

Jos $n = 1$, niin F on skalaarisuure,
muutoin, vektorisuure.

<u>Esimerkki</u> Piste $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ huoneessa.

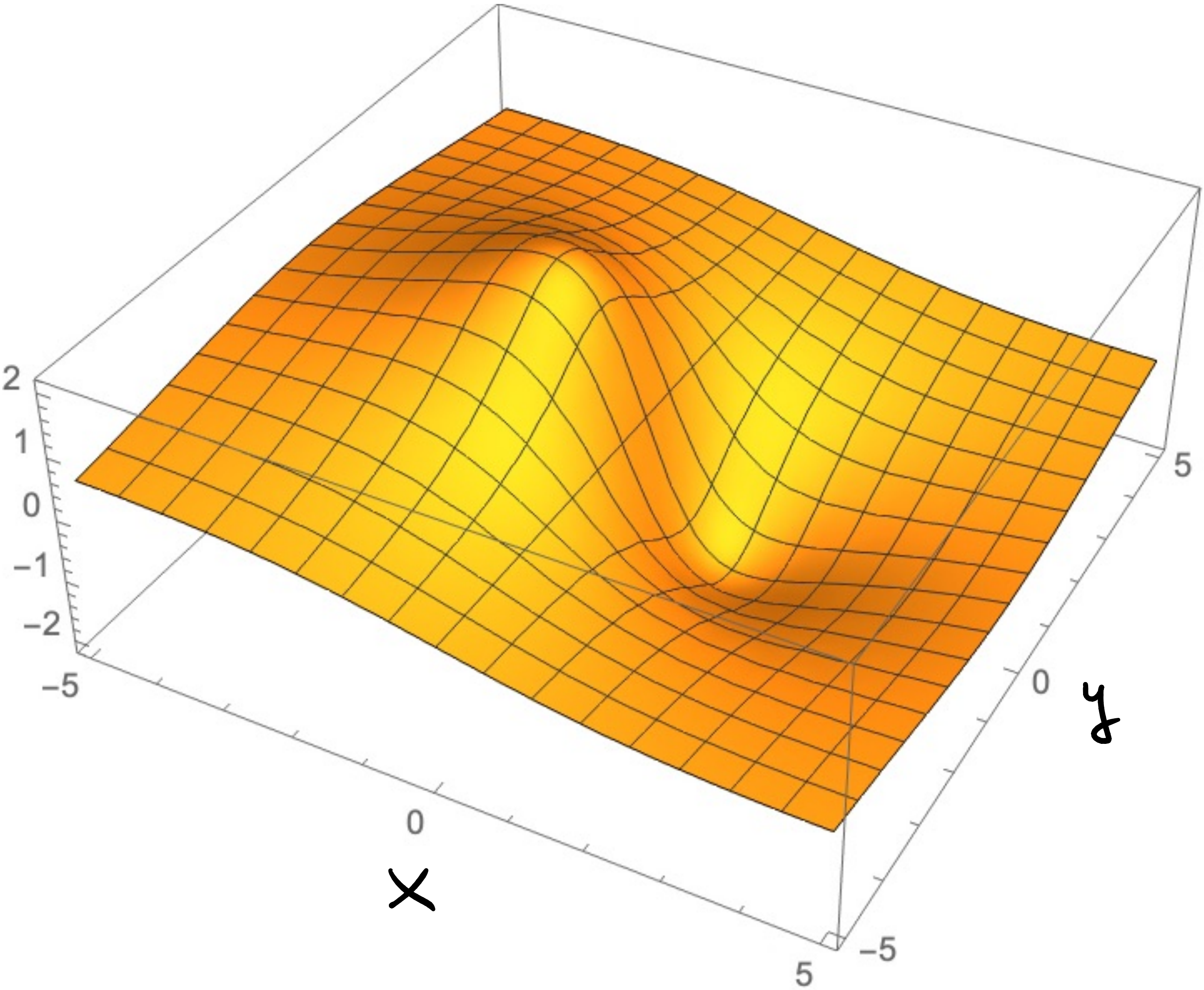
Lämpötila : $T(x, y, z) \in \mathbb{R}$
Ilmapaine : $p(x, y, z) \in \mathbb{R}$
Ilmavirran suunta : $w(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

<u>Kuvaajista</u>: Yhtälön $z = f(x, y)$ ratkaisut muodostavat pistejoukon

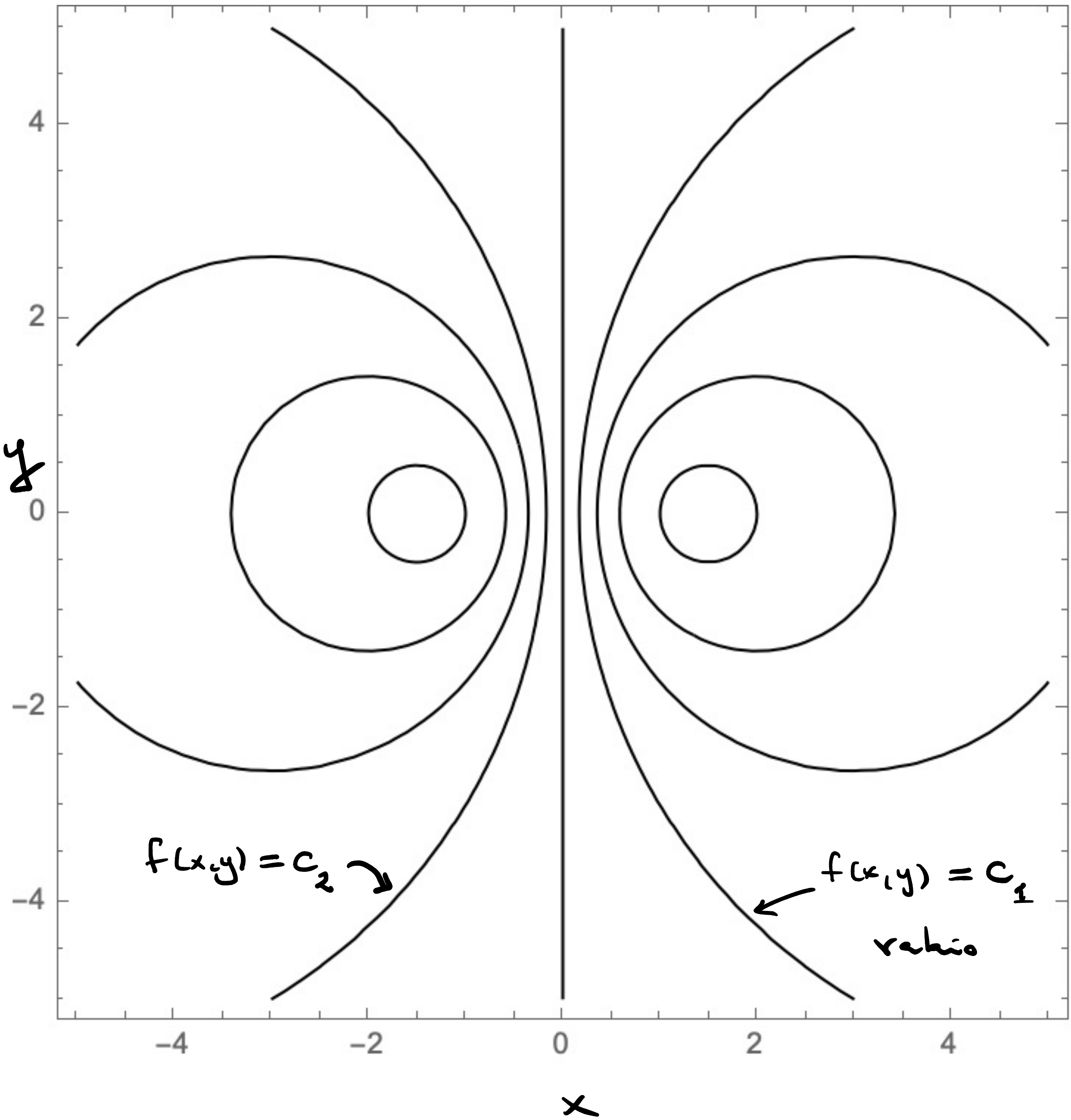
$$(x, y, f(x, y))$$

eli pinnan!

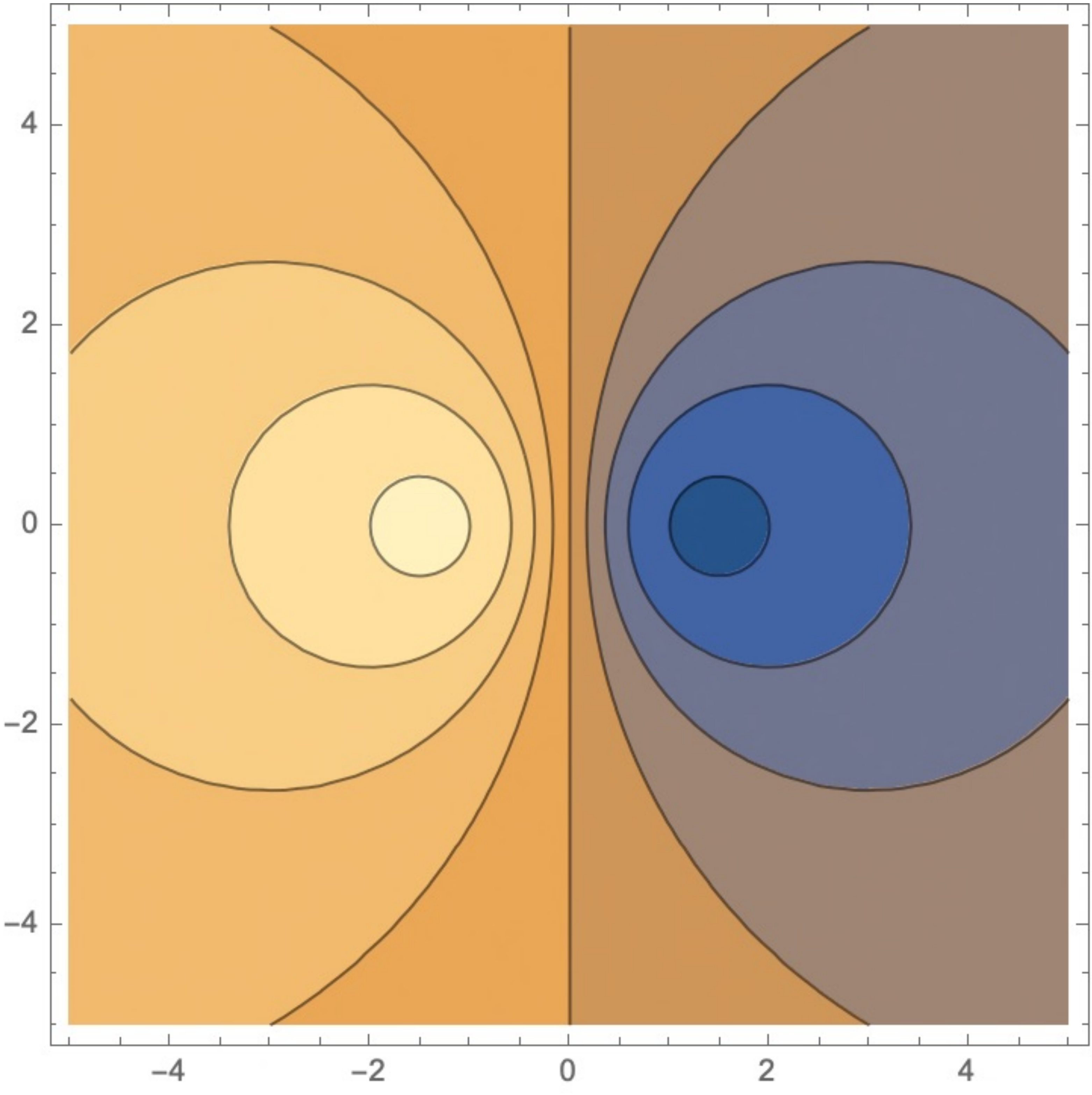
$$z = f(x,y) = -\frac{6x}{2+x^2+y^2}$$



Tasa-arvokäyrät



Onko $c_1 = c_2$? Emme voi tietää!



"Korkeus" voidaan esittää värein!

Tasa-arvokäyrät:

Pinnalla $z = f(x,y)$ tasa-arvokäyrä on pistejoukko (x, y, C), missä

$C = f(x,y)$ on vakio.

Huomaa! Tasa-arvokäyrien joukko ei määritä pintaa yksikäsitteisesti.

Esimerkki $z = g(x,y)$; $z \geq 0$

Implisiittisesti : $x^2 + (y-z)^2 = 2z^2$

Asetetaan $z = g(x,y) = C$, mistä

$$x^2 + (y-C)^2 = 2C^2$$

Ympyrä : kp : $(0, C)$, $R = \sqrt{2}\,C$

$z \longrightarrow \infty$: kp etääntyy origosta ; samalla säde kasvaa.

Raja-arvot ja jatkuvuus:

Määritelmä $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, jos

(i) f on määritelty jokaisessa pisteen (a,b) ympäristössä

(ii) kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa luku

$\delta = \delta(\varepsilon)$ s.e. $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

aina kun f on määritelty pisteessä (x,y) ja

$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$.

Esimerkki $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Raja-arvo origossa $= 0$?

Siis: $|f(x,y) - 0| = \left| \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \right|$

Arvioidaan: $x^2 \leq x^2 + y^2$

$$\leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Formaalisti: Olkoon $\varepsilon > 0$, joten valitaan

$\delta = \varepsilon$, jolloin

$$|f(x,y) - 0| < \varepsilon \text{ aina kun } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Määritelmän mukaan raja-arvo on olemassa ja $= 0$.

<u>Jatkuvuus</u>

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ja $x_0 \in D$.

Funktio $f : D \to \mathbb{R}^n$ on jatkuva pisteessä x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funktio on jatkuva joukossa D, jos se on jatkuva jokaisessa joukon D pisteessä.