Gradientti – nopeimman kasvun suunta

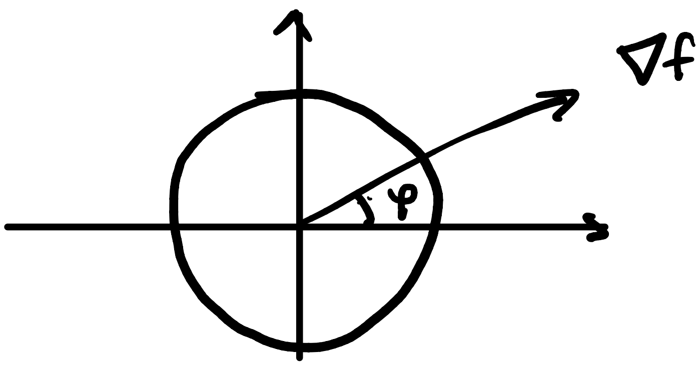
Olkoon $\underline{u}$ yksikkökiekolla : $\|\underline{u}\| = 1$

Pistetulon määritelmästä :

$$\underline{u} \cdot \nabla f = \|\underline{u}\| \, \|\nabla f\| \cos\theta = \|\nabla f\| \cos\theta$$

→ maksimi, kun $\theta = 0$ eli $\underline{u} \parallel \nabla f$

→ minimi, kun $\theta = \pi$ eli $\underline{u} \parallel -\nabla f$



$$\underline{u} = \cos\varphi \, \underline{i} + \sin\varphi \, \underline{j}$$

HESSEN MATRIISI

Kysymys: Mikä on toisen derivaatan vastine esim. pinnalla $z = f(x,y)$?

Oletus: $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jolla on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat

$$H_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\underline{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(\underline{x}) & \dots & \frac{\partial^2}{\partial n \partial x_1} f(\underline{x}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(\underline{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\underline{x}) & \dots & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\underline{x}) & & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Hessen matriisi $H_f(\underline{x})$ on symmetrinen.

Toisen asteen Taylor:

$$f(\underline{x} + \underline{h}) \simeq f(\underline{x}) + \underline{h} \cdot \nabla f(x) + \frac{1}{2} \underline{h}^T H_f(\underline{x}) \underline{h}$$

Kriittisessä pisteessä $\nabla f = \underline{0}$

Approksimaatio: $f(\underline{x}+\underline{h}) - f(\underline{x}) \simeq$

$$\simeq \frac{1}{2}\underline{h}^T H_f(\underline{x})\underline{h}$$

Huom! Jos $\underline{h}$ on vaakavektori, niin termi on

$$\frac{1}{2}\underline{h} H_f(\underline{x})\underline{h}^T .$$

Lisäksi $\underline{h}$ on "pieni."

<u>Neliömuodot</u> : $x^T A x$ on neliömuoto

$\underset{n \times n}{A}$ on symmetrinen : $A = A^T$

Reaalisen symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaalisia.

A on positiivisesti definiitti, jos sen kaikki oa:t ovat positiivisia.

A on negatiivisesti definiitti, . . .
. . . negatiivisia.

A on indefiniitti, jos sillä on eri merkkisiä ominaisarvoja.

Jos A on positiivisesti definiitti, niin

$$x^T A x > 0$$

kaikille $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\left[\ \underset{1\times n}{x^T}\ \underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x} = \underset{1\times 1}{y}\ \right]$$

Jos A on negatiivisesti definiitti: $x^T A x < 0$

Jos A on indefiniitti, niin neliömuoto saa eri merkkisiä arvoja.

A symmetrinen ja reaalinen

$$\Rightarrow A \text{ on diagonalisoituva}$$

$A = Q \Lambda Q^T$, missä $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Q ortogonaalinen : mv $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

$Q = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n)$

$$\Rightarrow y^T A y = \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n$$

$$\Rightarrow y^T A y > 0, \text{ vain jos } \lambda_i > 0$$

Sylvesterin kriteeri

$\underset{n \times n}{A}$ kuten edellä.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & & \cdots & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = |\quad|$

$\Delta_2 = |\quad|$

$\Delta_3 = |\quad|$

A on pos. def., jos kaikille $k = 1, \dots, n$,

$$\Delta_k > 0$$

A on neg. def., jos

$$\Delta_1 < 0, \ \Delta_2 > 0, \ \Delta_3 < 0, \ \dots, \ (-1)^n \Delta_n > 0$$

Miksi? $\det(A) = |A|$

$$\det(-A) = (-1)^n |A|$$

Todistelua $\quad A$ on pos. def.

(i) Välttämättömyys

Valitaan $\quad y = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_k\ 0 \ldots 0)^T$

$$z = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_k)$$

Pätee: $\quad z^T A_k z = y^T A y > 0$

(ii) Riittävyys: $\quad$ Induktio

Perusta: $\quad \{\Delta_1 \text{ ja } \Delta_2 > 0\} \Rightarrow A_2$ pos. def

$$\underset{> 0}{\Delta_1 = \alpha_{11}} \qquad \underset{> 0}{\Delta_2 = \alpha_{11}\alpha_{22}} - (\alpha_{12})^2$$

$$\Rightarrow \alpha_{22} > 0$$

$$\operatorname{tr} A_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} > 0 \quad \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

Induktioaskel: $\quad \{\Delta_k \text{ ja } \Delta_{k+1} > 0\} \Rightarrow \ldots$

Idea: $\quad A_{k+1}$ <u>ei ole</u> pos. def

$\Rightarrow$ sillä on oltava kaksi negatiivista ominaisarvoa (ja vastaavat ov:t)

Ov:t x, y : Valitaan $u = \alpha x + \beta y \neq 0$ ja $u_{k+1} = 0$

$\Rightarrow u^T A_{k+1} u < 0$

eli A_k on myös neg. def. RR

$\square$

<u>Esimerkki</u>

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 4$; $\Delta_2 = 4 \cdot 2 - (-1 \cdot -1) = 5$

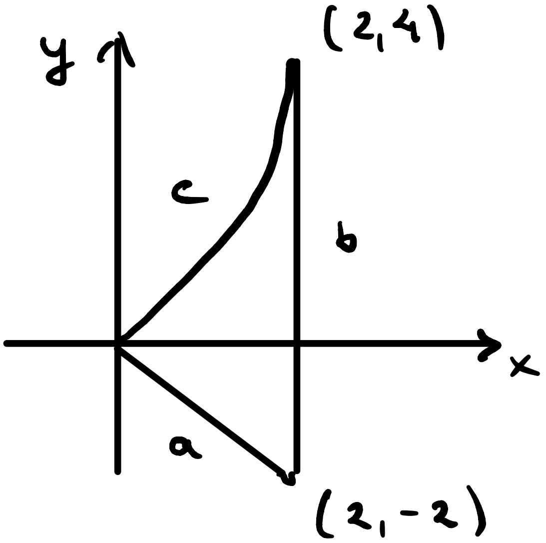
$\Delta_3 = 32 - 2 - 2 - 2 - 16 - 4 = 6$

$\Rightarrow A$ on pos. def.

<u>Esimerkki</u> $f(x,y) = xy - y$

$$A = \{(x,y) \mid x \in [0,2],\ -x \le y \le x^2\}$$

Etsitään maksimi ja minimi.



$$\begin{cases} f_x = y = 0 \\ f_y = x - 1 = 0 \end{cases}$$

kp $(1,0) \in A$

$f(1,0) = 0$

Reunakomponentit: $a \cup b \cup c$

$$a = \{(x,y) \mid x \in [0,2],\ y = -x\}$$

$$b = \{\quad \mid x = 2,\ y \in [-2,4]\}$$

$$c = \{\quad \mid \quad y = x^2\}$$

Komponentilla a: $f(0,0) = 0$, $f(2,-2) = -2$

$$f^{(a)}(x,y) = g^{(a)}(x) = -x^2 + x$$

$$Dg^{(a)}(x) = -2x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2}$$

$$f(1/2, -1/2) = \frac{1}{4}$$

Komponentille b:

$$f^{(b)}(x,y) = g^{(b)}(y) = 2y - y = y$$

$$f(2,-2) = -2 \quad \text{(yhä!)}$$

$$f(2,4) = 4$$

Komponentille c:

$$f^{(c)}(x,y) = g^{(c)}(x) = x^3 - x^2$$

$$Dg^{(c)}(x) = 3x^2 - 2x = 0 \iff x = 0 \text{ tai } x = \frac{2}{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right) = -\frac{4}{27}$$

(päätepisteet jo mukana)

Maksimi ja minimi poimitaan joukosta

$$\left\{0, \frac{1}{4}, 0, -2, 4, -\frac{4}{27}\right\}$$

$$\max_A f = 4, \quad \min_A f = -2$$