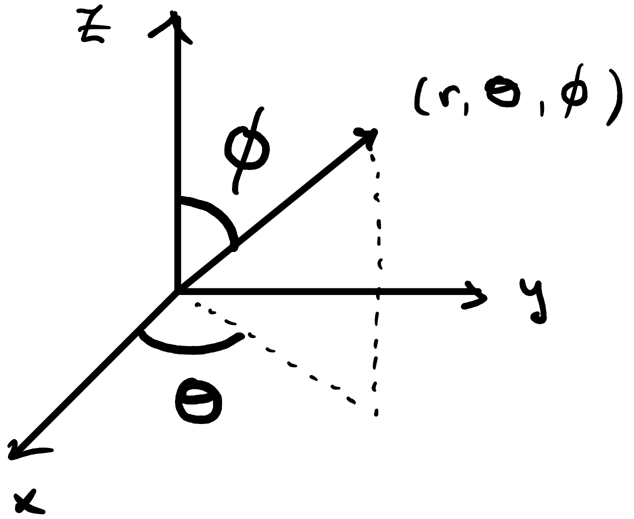
ESIMERKKI : PALLON TILAVUUS (R-säteinen)

$$\iiint_B 1 \, dx\,dy\,dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi \; d\phi\, d\theta\, dr$$



Piste $(x, y, z) \mathrel{\widehat{=}} (r, \theta, \phi)$

$r \geq 0$
$\theta \in [0, 2\pi]$
$\phi \in [0, \pi]$

Maantieteessä $\phi \longrightarrow \pi/2 - \phi$

Integraali : $\displaystyle \int_0^R \int_0^{2\pi} \Big/_{0}^{\pi} -r^2 \cos\phi \; d\theta\, dr$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\theta\, dr = \int_0^R 4\pi r^2 \, dr = \frac{4}{3}\pi R^3$$

SOVELLUKSIA

Pinta-ala : $D \subset \mathbb{R}^2$

$$a(D) = \iint_D 1 \, dx dy$$

Tilavuus : $D \subset \mathbb{R}^3$

$$v(D) = \iiint_D 1 \, dx dy dz$$

Massa :

$$m(D) = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dx dy dz ,$$

missä $\rho(x, y, z)$ on materiaalin tiheys.

Hitausmomentti : (z-akselin ympäri)

$$I_z(D) = \iiint_D \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, dx dy dz$$

Keskiö ja massakeskipiste: (taso)

$$\bar{x} = \frac{1}{a(D)} \iint_D x \, dx\, dy$$

$$\bar{y} = \frac{1}{a(D)} \iint_D y \, dx\, dy$$

vastaavasti (avaruudessa)

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x \, \rho(x,y,z) \, dx\, dy\, dz$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D y \, \rho(x,y,z) \, dx\, dy\, dz$$

$$\bar{z} = \quad \ldots$$

ESIMERKKI

Yksikkökuutio : $[0,1]^3 = D$

$\rho(x,y,z) = z$

mkp = ?

$$m(D) = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}$$

↳ tiheyttä ei saa unohtaa!

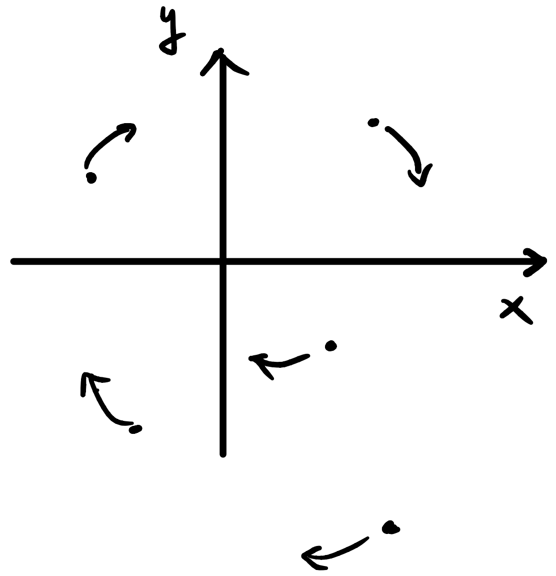
$\bar{y} = \bar{x}$ symmetrian nojalla

$$\bar{z} = \frac{1}{m(D)} \int_0^1\int_0^1\int_0^1 z \cdot z\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{3}$$

$$\text{mkp} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

Huomaa, että $\rho(x,y,z) = kz$, k vakio antaa saman mkp:n!

Hitausmomentti



Kaikille partikkeleille on sama kulmanopeus ω.

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\right]\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2+y_i^2)\right]}_{\text{hitausmomentti}}\omega^2$$

N = partikkelien lkm

Muutetaan diskreetti jatkuvaksi :

z-akselin ympäri kiertyvä kappale :

$$E = \frac{1}{2}\left[\iiint_D (x^2+y^2)\underbrace{\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{dm}\right]\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_z(D)\,\omega^2$$

ESIMERKKI

Jäykkä kappale: Sylinteri

$$D = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2 ,\ 0 \leq z \leq 1 \},$$

Vakiotiheys: $\rho = \rho_0$ $\qquad a > 0$

$$I_z(D) = \iiint_D (x^2 + y^2)\, \rho \, dx\, dy\, dz$$

$$= \rho_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2\, r \, dr\, d\theta\, dz$$

$$= 2\pi \rho_0 \int_0^a r^3\, dr = \frac{1}{2} \pi \rho_0 a^4$$

Massa: $\quad m(D) = \iiint_D \rho_0 \, dx\, dy\, dz$

$$= \rho_0 \pi a^2$$

$$I_z(D) = \frac{1}{2} m a^2$$