

MS-A0201  
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)  
Luento 11: Taso- ja tilavuusintegraalien sovellutuksia

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos<sup>1</sup>  
Aalto-yliopisto

Kevät 2021

---

<sup>1</sup>Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

# Moninkertaisten integraalien sovelluksia 1/3

Tähän mennessä moninkertaisten integraalien sovelluksina on esiintynyt:

- Alueen  $D \subset \mathbb{R}^2$  pinta-ala

$$A(D) = \iint_D 1 \, dA.$$

- Kappaleen  $D \subset \mathbb{R}^3$  tilavuus

$$V(D) = \iiint_D 1 \, dV.$$

## Moninkertaisten integraalien sovelluksia 2/3

Mekaniikassa tulevat vastaan nämä:

- Kappaleen massa

$$m(D) = \iiint_D \rho(x, y, z) dV.$$

- Hitausmomentti kappaleen pyöriessä  $z$ -akselin ympäri:

$$I_z(D) = \iiint_D \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) dV.$$

Tässä  $\rho(x, y, z)$  on materiaalin tiheys pisteessä  $(x, y, z)$ .

## Moninkertaisten integraalien sovelluksia 3/3

- Kaksiulotteisen tasolevyn painopisteen eli massakeskipisteen  $(\bar{x}, \bar{y})$  laskeminen

$$\bar{x} = \frac{1}{A(D)} \iint_D x \, dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{A(D)} \iint_D y \, dA,$$

jossa pinta-ala  $A(D)$  on laskettu tasointegraalilla jo aiemmin.

- Jos levyn massa ei ole tasaisesti jakautunut, integraalia korjataan paikasta riippuvalla tiheydellä  $\rho(x, y)$

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iint_D x \rho(x, y) \, dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iint_D y \rho(x, y) \, dA.$$

jossa massa  $m(D) = \iint_D \rho(x, y) \, dA$  lasketaan tasointegraalilla.

## Massakeskipiste 1/2

Kolmiulotteisen kappaleen  $D$  massakeskipiste  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D x\rho(x, y, z) dV,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D y\rho(x, y, z) dV,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m(D)} \iiint_D z\rho(x, y, z) dV,$$

missä  $\rho = \rho(x, y, z)$  on kappaleen tiheys pisteessä  $(x, y, z)$  ja  $m(D)$  on kappaleen massa (tilavuusintegraalilla).

## Massakeskipiste 2/2

Kaava voidaan kirjoittaa myös vektorimuodossa

$$\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k} = \frac{\iiint_D \mathbf{r}\rho \, dV}{\iiint_D \rho \, dV},$$

missä  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

## Esimerkki

- Lasketaan epäyhtälöiden  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  ja  $0 \leq z \leq 1$  määräämän yksikkökuution  $D$  massakeskipiste, kun tiheys  $\rho(x, y, z) = z$ .
- **Huom.** Yksikkökuutio  $D$  voidaan myös määritellä käyttäen nk. karteesista tuloa:

$$D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^3.$$

Tämä merkintätapa tarkoittaa samaa kuin ylläoleva määritelmä epäyhtälöiden avulla.

## Ratkaisu 1/2

- Lasketaan ensin massa

$$\begin{aligned}\iiint_D \rho \, dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 z \, dz = \left| \frac{1}{2} z^2 \right|_{z=0}^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- Saadaan

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xz \, dx \, dy \, dz}{1/2} = \frac{\left( \int_{x=0}^1 \frac{1}{2} x^2 \right) \left( \int_{z=0}^1 \frac{1}{2} z^2 \right)}{1/2} \\ &= \frac{(1/2)^2}{1/2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$



## Ratkaisu 2/2

- Vastaavasti

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 yz \, dx \, dy \, dz}{1/2} = \frac{(1/2)^2}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

- Edelleen voidaan laskea

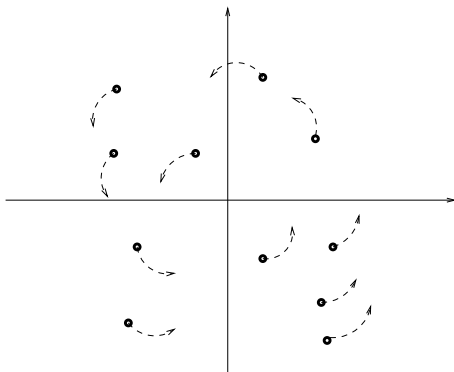
$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 z^2 \, dx \, dy \, dz}{1/2} = \frac{\Big|_{z=0}^1 \frac{1}{3} z^3}{1/2} \\ &= \frac{(1/3)}{(1/2)} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

- Massakeskipisteeksi saadaan

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1/2, 1/2, 2/3).$$

# Hitausmomentti 1/3

Tarkastellaan tilannetta, jossa pistemäiset kappaleet kiertävät origoa  $xy$ -tasossa ympyrän muotoista rataa pitkin samalla kulmanopeudella.



## Hitausmomentti 2/3

- Voidaan laskea kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia saadaan laskemalla summa

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right] \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \right] \omega^2,$$

missä  $\omega$  on kulmanopeus ja  $m_i$ ,  $x_i$  sekä  $y_i$  ovat  $i$ :n kappaleen massa ja paikka.

- Summaa

$$\sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

kutsutaan hitausmomentiksi.

## Hitausmomentti 3/3

- Ajattelemalla  $z$ -akselin ympäri pyörivä kappale joukoksi "infinitesimaalisen pieniä" pisteitä, voidaan edelläolevasta summasta päätellä kappaleen liike-energia:

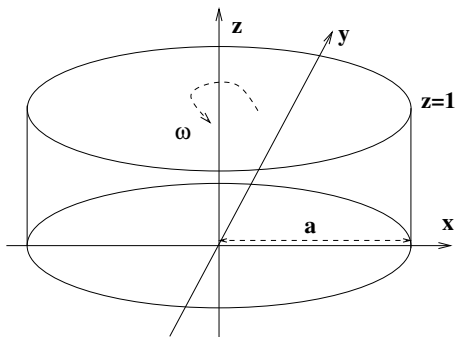
$$E = \frac{1}{2} \left[ \iiint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV \right] \omega^2$$
$$= \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

missä

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV = \iiint_D dm \cdot r_z^2$$

on kappaleen hitausmomentti  $z$ -akselin suhteen ( $r_z^2 = x^2 + y^2$  ja  $dm = \rho(x, y, z) dV$ ).

# Esimerkki



- Lasketaan sylinterin

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ ja } 0 \leq z \leq 1\}, \quad a > 0$$

hitausmomentti z-akselin suhteen, kun tiheys on vakio  $\rho = \rho_0$ .

# Ratkaisu 1/2

- Lasketaan

$$\begin{aligned} I_z &= \iiint_D (x^2 + y^2) \rho_0 \, dV \\ &= \rho_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^a r^3 \, dr = \frac{1}{2} \pi \rho_0 a^4. \end{aligned}$$

## Ratkaisu 2/2

- Toisaalta sylinterin massa on

$$m = \iiint_D \rho_0 dV = \rho_0 V(D) = \rho_0 \pi a^2.$$

- Siten hitausmomentti voidaan kirjoittaa

$$I_z = \frac{1}{2}(\pi \rho_0 a^2) a^2 = \frac{1}{2} m a^2.$$