Ketjusääntö

$$\frac{d f(g(x))}{dx} = \frac{df}{dx}\,\frac{dg}{dx}$$

$$D(\underline{f} \circ \underline{g})(\underline{x}) = D\underline{f}(\underline{g}(\underline{x}))\, D\underline{g}(\underline{x})$$

Määritelmä Differentiaalikehitelmä

$$f(a+h) - f(a) = L(a,h) + \|h\|\, \varepsilon(a,h)$$

Huomaa! $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$L(a,h)$ on linearisointi ja

$\varepsilon(a,h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Aiemman nojalla $df(a,h) = L(a,h)$ on differentiaali ja lineaarikuvauksen ominaisuuksien nojalla $L(a,h) = C(a)h$, missä $C(a)$ on täsmalleen Jacobin $\overset{p\times n}{\text{matriisi}}$ evaluoituna pisteessä a. Merkitään $\overset{p\times n}{Jf}$.

Lause Olkoot f ja g differentioituvia (sopivissa pisteissä) tällöin myös $f \circ g$ on, ja differentiaaleille

$$d(f\circ g)(a,h) = df(g(a), dg(a,h))$$

eli

Jacobin matriiseille

$$J(f\circ g)(a) = Jf(g(a))\,Jg(a).$$

<u>Todistus</u> (Lyhyesti)

Oletetaan, että väite differentiaaleille pitää paikkaansa:

$$\begin{aligned} J(f\circ g)(a)\,h &= df(g(a), dg(a,h)) \\ &= Jf(g(a))\,dg(a,h) \qquad (\text{lineaarisuus}) \\ &= Jf(g(a))\,Jg(a)\,h, \end{aligned}$$

mistä Jacobin matriiseja koskeva väite seuraa.

Varsinainen tulos on suora lasku (pitkä), missä sijoitetaan differentiaalikehitelmät

$$\begin{aligned} g(a+h) - g(a) &= dg(a,h) + \|h\|\,\varepsilon_g(a,h), \\ f(b+k) - f(b) &= df(b,k) + \|h\|\,\varepsilon_f(b,k), \end{aligned}$$

kun $k = g(a+h) - g(a)$ eli $g(a+h) = b+k$.

Viisi yhtäsuuruutta ja sitten onkin valmista!

$\square$