

SCI-C0200: Tietokoneharjoitustyö

Tehtävä 17. Teemu Teekkari maanviljelijänä

Teemu Teekkarin opinnot eivät oikein sujuneet halutulla tavalla, joten Teemu päätti palata takaisin juurilleen ja ryhtyi maanviljelijäksi. Teemu päätti kuitenkin maanviljelijäuransa alussa, että hän tulee viljelemään maata vain seuraavat neljä vuotta, jonka jälkeen taas uudet elämänhaasteet kutsuvat.

Isältään Teemu oli oppinut, että vuoden sato riippuu vain edellisen vuoden maaperän laadusta. Tästä syystä Teemu mittaakin joka vuosi ennen satokauden alkua maaperänsä kemiallisen tasapainon. Mittauksiinsa perustuen Teemu on saanut kehitettyä seuraavat siirtotodennäköisyydet maaperän eri tilojen välille:

$$\begin{array}{r} \text{maaperän tila seuraavana vuonna} \\ \text{maaperän tila tänä vuonna} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \left(\begin{array}{ccc} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{array} \right) & = & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

Edellä olevassa esityksessä oletetaan, että maan tuottavuuden ja maanlaadun välillä vallitsee seuraava riippuvuus:

Tuottavuus	Maan tila
Hyvä	1
Keskinkertainen	2
Huono	3

\mathbf{P}^1 :ssä olevista siirtotodennäköisyyksistä seuraa, että tuottavuus seuraavana vuonna ei voi olla parempi kuin tänä vuonna. Teemu voi kuitenkin muuttaa siirtotodennäköisyyksiä lannoittamalla maatilkkuaan. Ilman lannoitusta \mathbf{P}^1 :n siirtotodennäköisyydet eivät muutu, mutta lannoituksen tuloksena saadaan aikaan seuraava siirtotodennäköisyysmatriisi:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \left(\begin{array}{ccc} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{array} \right) \end{array}$$

Lannoituksella aikaansaadun siirtomatriisin \mathbf{P}^2 avulla voidaan siis parantaa tuottavuutta verrattuna edelliseen vuoteen.

Teemu tietää myös, mitä maa kussakin tilassa tuottaa tilasta toiseen siirryttäessä. Teemun laskeskelema tuottomatriisi ilmoittaa voiton tai tappion yhden vuoden periodin aikana maaperän tilan muuttuessa tilasta toiseen. Yksikkönä on 1000 €. Matriisit \mathbf{R}^1 ja \mathbf{R}^2 kertovat, mitkä ovat matriiseihin \mathbf{P}^1 ja \mathbf{P}^2 liittyvät maanviljelystä saatavat tuotot eli \mathbf{R}^1 vastaa tuottoja ilman lannoitusta ja \mathbf{R}^2 tuottoja lannoituksen kanssa:

$$\mathbf{R}^1 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \left(\begin{array}{ccc} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\mathbf{R}^2 = \begin{matrix} & & & 1 & 2 & 3 \\ & & & 6 & 5 & -1 \\ & 1 & \left(\right. & & & \\ & 2 & & 7 & 4 & 0 \\ & 3 & & 6 & 3 & -2 \end{matrix}$$

Edellisiin tietoihin pohjautuen Teemu päättää optimoida neljän vuoden aikana saamansa tuoton odotusarvon. Tässä optimointityössä hän käyttää dynaamista ohjelmointia.

Merkitään \mathbf{P}^1 :n elementtejä $p_{i,j}^1$:llä, \mathbf{P}^2 :n elementtejä $p_{i,j}^2$:llä sekä \mathbf{R}^1 :n elementtejä $r_{i,j}^1$:llä ja \mathbf{R}^2 :n elementtejä $r_{i,j}^2$:llä. Määritellään nyt taaksepäin rekursiivinen odotettavissa oleva tuotto seuraavasti:

$$f_n(i) = \text{tilojen odotettavissa oleva tuotto vuonna } n, n+1, \dots, 3, \\ \text{kun systeemin tila vuoden } n \text{ alussa on } i.$$

Merkitään lisäksi v_i^k :lla ($k = 1, 2, i = 1, 2, 3$) tilasta i yhdellä siirrolla vaihtoehdolla k saatavaa odotettua tuottoa. Tällöin v_i^k voidaan esittää muodossa:

$$v_i^k = \sum_{j=1}^3 p_{i,j}^k r_{i,j}^k \quad (1)$$

Tällöin dynaamista ohjelmointia kuvaava rekursioyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa:

$$f_4(i) = \max_k \{v_i^k\} \\ f_n(i) = \max_k \{v_i^k + \sum_{j=1}^3 p_{i,j}^k f_{n+1}(j)\}, \quad n = 1, 2, 3$$

Seuraavana on esimerkki rekursioyhtälön osana olevan v_i^k :n laskennasta:

$$v_1^1 = 0.2 \times 7 + 0.5 \times 6 + 0.3 \times 3 = 5.3 \\ v_2^1 = 0 \times 0 + 0.5 \times 5 + 0.5 \times 1 = 3 \\ v_3^1 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times -1 = -1$$

Tehtävänänne on laskea Teemun optimaalinen strategia lannoittaa maataan (minä vuosina lannoitetaan), kun systeemi voi olla ensimmäisenä vuonna joko tilassa 1, 2 tai 3. Ilmoittakaa suurin odotettavissa oleva tuotto kullekin valitsemallesi optimaaliselle strategialle. Liittäkää työselostukseenne käyttämänne ohjelma sekä ehdottamanne optimaaliset strategiat sekä niitä vastaavat odotettavissa olevat tuotot.