Differential- och integralkalkyl 2, MS-A0209

- Björn Ivarsson
  Y326
  bjorn.ivarsson@aalto.fi

- Andreas Holmqvist, Felix Furu & Younes Elberkennou

Betyg på kursen på två sätt.

(1) Övningar samt kurstentamen

40% {
Övningstillfälle 1 (mån, tis)
" Genomgång hemtal, möjlighet att fråga om inl.uppg.
Övningstillfälle 2 (tors, fre)
Demo-övningar, möjlighet att fråga om hemtal

Inlämningsuppgifter & hemtal delas ut tisdagar
}

Kurstentamen 60%

(2) Tentamen

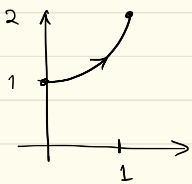
I denna kurs skall vi studera $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Vi är intresserade av i princip samma problem som när vi studerade $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dock uppstår nya problem och möjligheter.

Kurvor

En kurva är en kontinuerlig avbildning
$$\vec{r}: \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{I}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Ex $\quad \vec{r}(t) = (t, t^2+1) \qquad 0 \le t \le 1$

$(\vec{r}: [0,1] \to \mathbb{R}^2)$



Notera att det är avbildningen som är kurvan och inte bilden! Dock om man vill lägga fokus på bilden så prater man om avbildningen som en parametrisering av kurvan.

Olika parametriseringar kan ge upphov till samma bild ("kurva")

Ex $\quad \vec{r}(t) = (t^2, t^4+1) \quad ; \quad 0 \le t \le 1$

(Samma "bild" som ovan)

När vi har kurvor i planet och rummet skriver vi ofta

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Några viktiga kurvor

Räta linjer genom punkter

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^m \quad , \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m$$

$$\vec{r}(t) = t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

ett linjesegment som börjar i $\vec{b}$ och slutar i $\vec{a}$.

Ex $\vec{a} = (1,1) \quad , \quad \vec{b} = (1,0)$

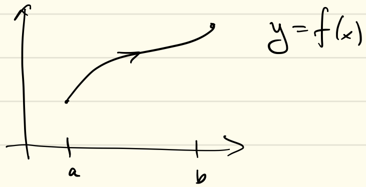
$$\vec{r}(t) = t(1,1) + (1-t)(1,0) = (t,t) + (1-t,0) =$$
$$= (1, t)$$

Vill man ha den räta linjen genom punkterna så tillåter man bara $t \in \mathbb{R}$

Grafen till en funktion

$y = f(x) \quad ; \quad a \leq x \leq b$

$\vec{r}(t) = (t, f(t)) \qquad a \leq t \leq b$



Cirklar i planet

$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

ger en cirkel med radie 1 och centrum (0,0).

$\begin{cases} x(t) = x_0 + a\cos t \\ y(t) = y_0 + a\sin t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

ger en cirkel med radie a och centrum (x_0, y_0)

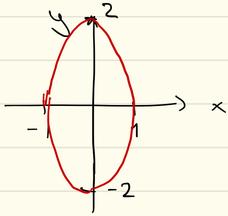
Vi vet också att cirklar är lösningsmängd till $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$. Detta är en så kallad implicit framställning av cirkeln

$$F(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-a^2=0$$

$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ger ofta implicita framställningar av kurvor via $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ F(x,y)=a\}$

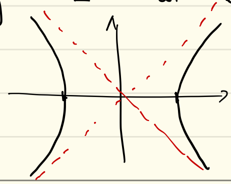
<u>Ex</u> $\quad x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ är en ellips

$$x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$$



I allmänhet $\quad \left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ ger ellipser.

<u>Ex</u> $\quad x^2-y^2=1$ är en hyperbel



I allmänhet

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad \text{eller}$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1 \quad \text{ger hyperbler}$$

Längd av kurvor (Båglängd)

Givet en (parametriserad) kurva

$$r : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

Så är

$$r'(t) = \frac{dr}{dt} \in \mathbb{R}^m \quad \text{kurvans tangentvektor}$$

Man får kurvans längd om man beräknar följande integral

$$l = \int_a^b |r'(t)|\, dt .$$

Ex $r(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $R>0$

Detta är en cirkel med radie R

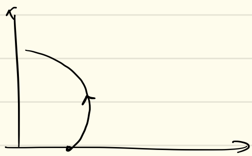
$$r'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$$

$$l = \int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi R$$

Ex Beräkna längden av

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$



$$r'(t) = \left(e^t (\cos t - \sin t), e^t (\sin t + \cos t) \right)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{e^{2t} \left((\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 \right)} =$$

$$= e^t \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t - 2 \cos t \sin t + 2 \cos t \sin t}$$

$$= e^t \sqrt{2}$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} e^t \, dt = \sqrt{2} \left(e^{2\pi} - e^0 \right) = \sqrt{2} e^{2\pi} - \sqrt{2}$$