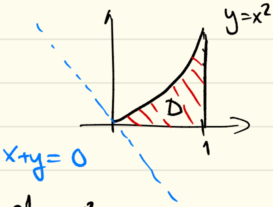
Ex Beräkna $I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dA$ där D ges av olikheterna

$$0 \le x \le 1 \quad \text{och} \quad 0 \le y \le x^2$$

Lösning:



I är en generaliserad integral eftersom $f(x,y)$ är obegränsad i D.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy \right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \Big[-(x+y)^{-1} \Big]_{y=0}^{y=x^2} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1+x-1}{x(1+x)}\, dx =$$

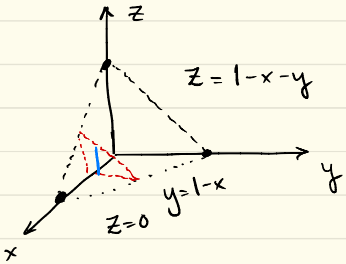
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\ln(1+x) \Big]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln 2 - \ln(1+\varepsilon) = \ln 2$$

Trippel- och multipelintegraler funkar på samma sätt

Ex Låt T vara tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$. Beräkna

$$\iiint_T y\, dV.$$



$$\iiint_T y\,dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} y\,dz =$$

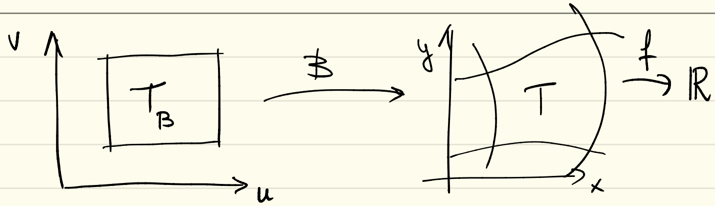
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[zy \right]_{z=0}^{z=1-x-y} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2}(1-x) - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)(1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Variabelbyten i multipelintegraler

Låt oss börja med 2 variabler. Säg att vi vill beräkna $\iint_T f(x,y)\,dA$ där T är ett komplicerat område.



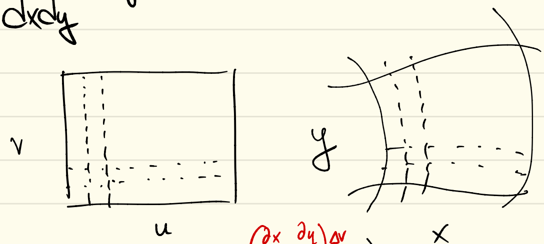
Antag också att vi kan hitta en inverterbar avbildning

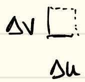
$$B(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

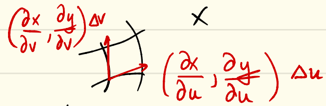
Det verkar enklare att beräkna

$$\iint_{T_B} f(x(u,v), y(u,v))\, dA_{(u,v)}$$

För att göra detta måste vi relatera dudv till dxdy







$$\text{Arean} \approx \underbrace{\left|\det\begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{pmatrix}\right|}_{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|} \Delta u \Delta v$$

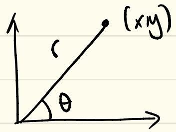
Vi får $dA_{(x,y)} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dA_{(u,v)}$

eller $dxdy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$

Ofta är dit bra att komma ihåg

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 1 \Big/ \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|$$

Polära koordinater



Varje punkt $(x,y) \,(\neq (0,0))$ kan beskrivas unikt av en radie $r>0$ och en vinkel $\theta \in [0, 2\pi)$

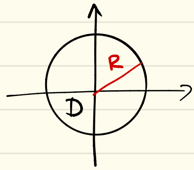
Vi kallar (r,θ) punktens polära koordinater.
Hur är $drd\theta$ och $dxdy$ relaterade?

Vi har $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ (och $r = \sqrt{x^2+y^2}$)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Alltså $dxdy = r\,drd\theta$

Ex Beräkna arean av en disk med radie R.

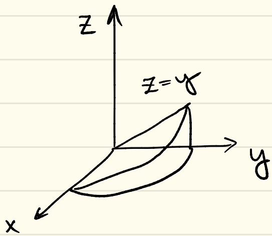


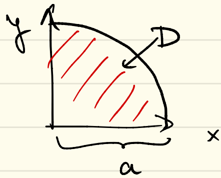
$$\text{Arean} = \iint_D 1 \, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R 1 \, r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \, d\theta = \frac{2\pi R^2}{2} =$$

$$= \pi R^2$$

Ex Beräkna volymen av kroppen i den första oktanten som begränsas av cylindern $x^2+y^2=a^2$ och ligger under $z=y$





$$\text{Volymen} = \iint_D z \, dxdy$$

Byt till polära koordinater i (x,y)-planet

$$\text{Volymen} = \iint_D z\,dxdy \overset{(z=y)}{=} \iint_D y\,dxdy =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^a r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^a r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=a} \sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3}\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{3}(-0-(-1)) = \frac{a^3}{3}$$

Ex Beräkna $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

Vi kan inte skriva ner en primitiv funktion till e^{-x^2} bestående av elementära funktioner. Vi använder ett trick.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = I^2$$

Vi beräknar I^2

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,drd\theta =$$

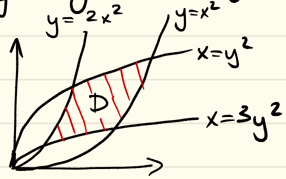
$$= 2\pi \lim_{N\to\infty} \int_0^N r e^{-r^2}\,dr = \left[\begin{array}{l} t = r^2 \\ dt = 2r\,dr \end{array}\right] =$$

$$= \pi \lim_{N\to\infty} \int_0^{N^2} e^{-t}\,dt = \pi \lim_{N\to\infty} \left(1 - e^{-N^2}\right) = \pi$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Ex Beräkna arean av området som begränsas av parablerna $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ och $x = 3y^2$.

Lösning:



Inför $u = \dfrac{x^2}{y}$ och $v = \dfrac{y^2}{x}$

$$\frac{1}{2} \le u \le 1 \quad \text{och} \quad \frac{1}{3} \le v \le 1$$

$$\iint_D 1\,dxdy = \int_{1/3}^{1}\int_{1/2}^{1} 1 \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$