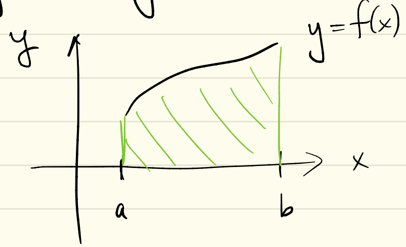
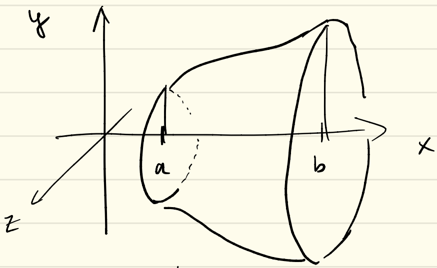
Rotationsvolymer

Antag att $y = f(x)$



roteras kring x-axeln. Vi får då en så kallad rotationsvolym.



Vi kan beräkna rotationskroppens volym genom att införe cylindriska koordinater enligt

$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ x = x \end{cases} \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dx$$

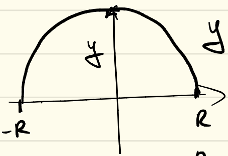
Då blir volymen

$$\iiint 1 \, dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi \int_a^b dx \int_0^{f(x)} r\,dr = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Ex Beräkna volymen hos ett klot med radie R.

Lösning:



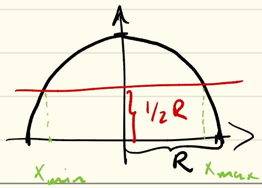
$y = \sqrt{R^2 - x^2} = f(x)$

Rotera kring x-axeln!

$$\text{Klotets volym} = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 \, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Fortsättning: Vad blir volymen om man borrar ett hål i klotet (exakt genom centrum) med diameter R?



Vad är x_{max} och x_{min}?

Lös $x^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}R^2$

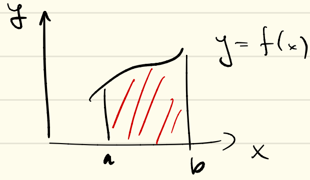
$$\Rightarrow x_{min} = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \quad \& \quad x_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

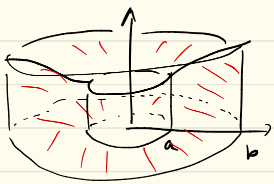
$$\text{Volymen} = \pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}R}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} (R^2 - x^2) - \frac{1}{4}R^2 \, dx =$$

$$= \pi\left[\frac{3}{4}R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}R}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} = 2\pi\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R^3 - \frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}R^3\right)$$

$$= 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}R^3\pi$$

Vad händer om man roterar $y = f(x)$ kring y-axeln istället?





Vi kan också hitta en formel för denna typ av rotationskropp. Låt oss införa cylindriska koordinater enligt

$$x = r\cos\theta$$
$$y = y \qquad\qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dy$$
$$z = r\sin\theta$$

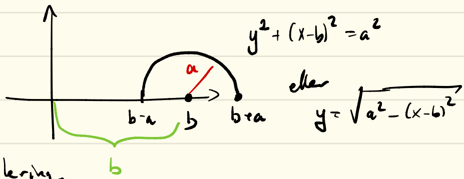
$$\text{Volymen} = \iiint 1 \, dx\,dy\,dz = \int_a^b r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{f(x)} dy =$$

$$= 2\pi \int_a^b r f(r)\,dr \qquad \text{Hmm, } f(r)\ ?$$

Namnet på variabeln spelar ingen roll!

$$\Rightarrow \text{Volymen} = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx .$$

Ex Volymen av en torus.



Rotera denna kring y-axeln och få en halv torus.

Volymen blir därför

$$4\pi \int_{b-a}^{b+a} x \sqrt{a^2 - (x-b)^2}\,dx = \left[\begin{matrix} t = x-b & t_1 = a \\ dt = dx & t_0 = -a \end{matrix} \right] =$$

$$= 4\pi \int_{-a}^{a} (t+b)\sqrt{a^2-t^2}\,dt = 4\pi \int_{-a}^{a} t\sqrt{a^2-t^2}\,dt + 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-t^2}\,dt$$

halva arean av en disk med radie a.

$$= 4\pi b \frac{a^2\pi}{2} + 4\pi \int_{-a}^{a} \underbrace{t\sqrt{a^2-t^2}}_{\text{udda funktion}}\,dt =$$

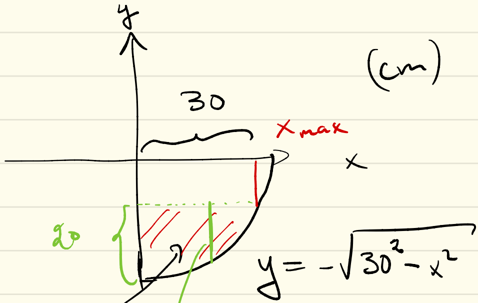
udda funktion

$f(-t) = -f(t)$

$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$

$$= 2\pi^2 b a^2$$

Ex Vi har en halvsfärisk skål med radie 30 cm som vi fyller med vatten så det maximala djupet är 20 cm. Hur mycket vatten finns i skålen?



Lösning:

Alt 1

Rotera kring y-axeln

$$\text{Volymen} = 2\pi \int_0^{x_{max}} x\left(-10 - \left(-\sqrt{30^2 - x^2}\right)\right) dx$$

Vad är x_{max}?

$$x^2 + (-10)^2 = 30^2 \implies x^2 = 900 - 100 = 800$$

$$x = \pm\sqrt{800}$$

$$\implies \text{Volymen} = 2\pi \int_0^{\sqrt{800}} x\sqrt{900 - x^2} - 10x \, dx =$$

$$= 2\pi\left(\int_0^{\sqrt{800}} x\sqrt{900 - x^2}\, dx - \left[5x^2\right]_0^{\sqrt{800}}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} t = 900 - x^2 & t_{\sqrt{800}} = 100 \\ dt = -2x\, dx & t_0 = 900 \end{array}\right] =$$

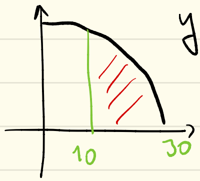
$$= 2\pi \left(\int_{100}^{900} \frac{t^{1/2}}{2}\, dt - 4000 \right) =$$

$$= 2\pi \left(\left[\frac{t^{3/2}}{3} \right]_{100}^{900} - 4000 \right) = 2\pi \left(\frac{900 \cdot 30}{3} - \frac{100 \cdot 10}{3} - 4000 \right)$$

$$= 2\pi \left(9000 - 4000 - \frac{1000}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} \left(15000 - 1000 \right)$$

$$= \frac{\pi \cdot 28000}{3} \text{ cm}^3$$

Alt 2:



$$y = \sqrt{900 - x^2}$$

Rotera detta kring x-axeln

$$\text{Volymen} = \pi \int_{10}^{30} 900 - x^2 \, dx =$$

$$= \pi \left[900x - \frac{x^3}{3} \right]_{10}^{30} =$$

$$= \pi \left(900(30 - 10) - \left(900 \cdot 10 - \frac{100 \cdot 10}{3} \right) \right)$$

$$= \pi \left(900 \cdot 20 - 900 \cdot 10 + \frac{1000}{3} \right) =$$

$$= \pi \left(9000 + \frac{1000}{3} \right) = \frac{\pi \cdot 28000}{3} \text{ cm}^3$$