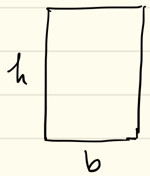
Funktioner av flera variabler

Vi studerar nu $f : A \to \mathbb{R}$ där $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

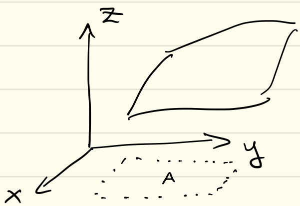
Ex Arean för rektanglar



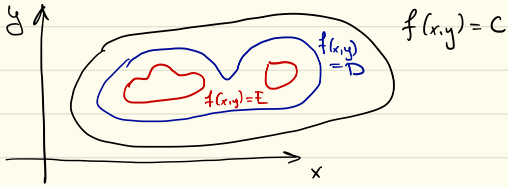
$A(b,h) = b \cdot h$

En sak som är svårare för funktioner av flera variabler är att visualisera dem. För funktioner av 2 variabler kan man visualisera grafen som en yta i $\mathbb{R}^3$. För fler variabler måste man ta till andra knep.

$z = f(x,y)$

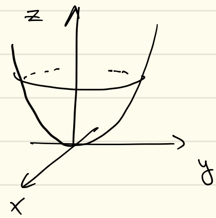


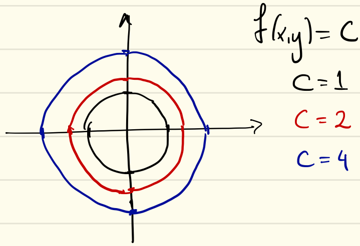
Man kan också använda sig av nivåkurvor (eller nivåytor etc.)



På detta sätt "spar man en dimension".

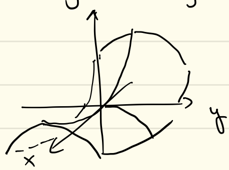
Ex $f(x,y) = x^2 + y^2$



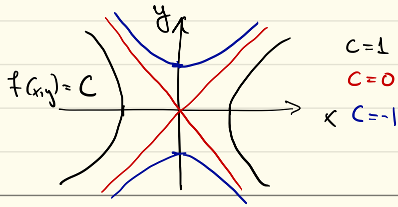


"Höjdkurvor på kartor"

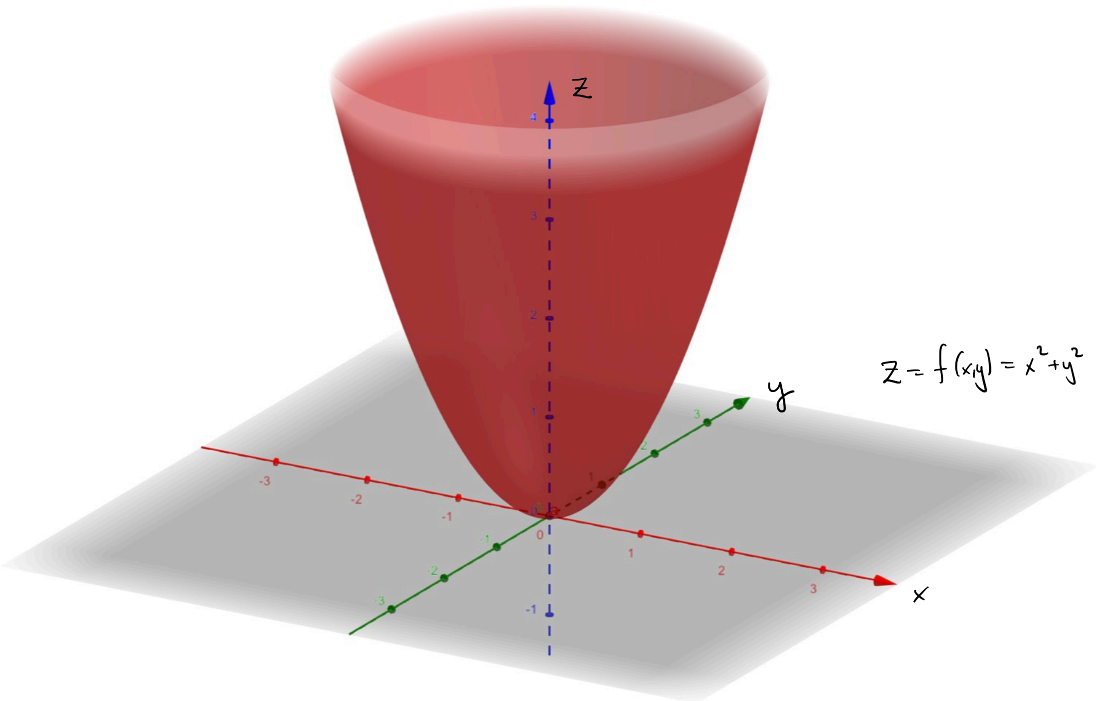
Ex $f(x,y) = x^2 - y^2$



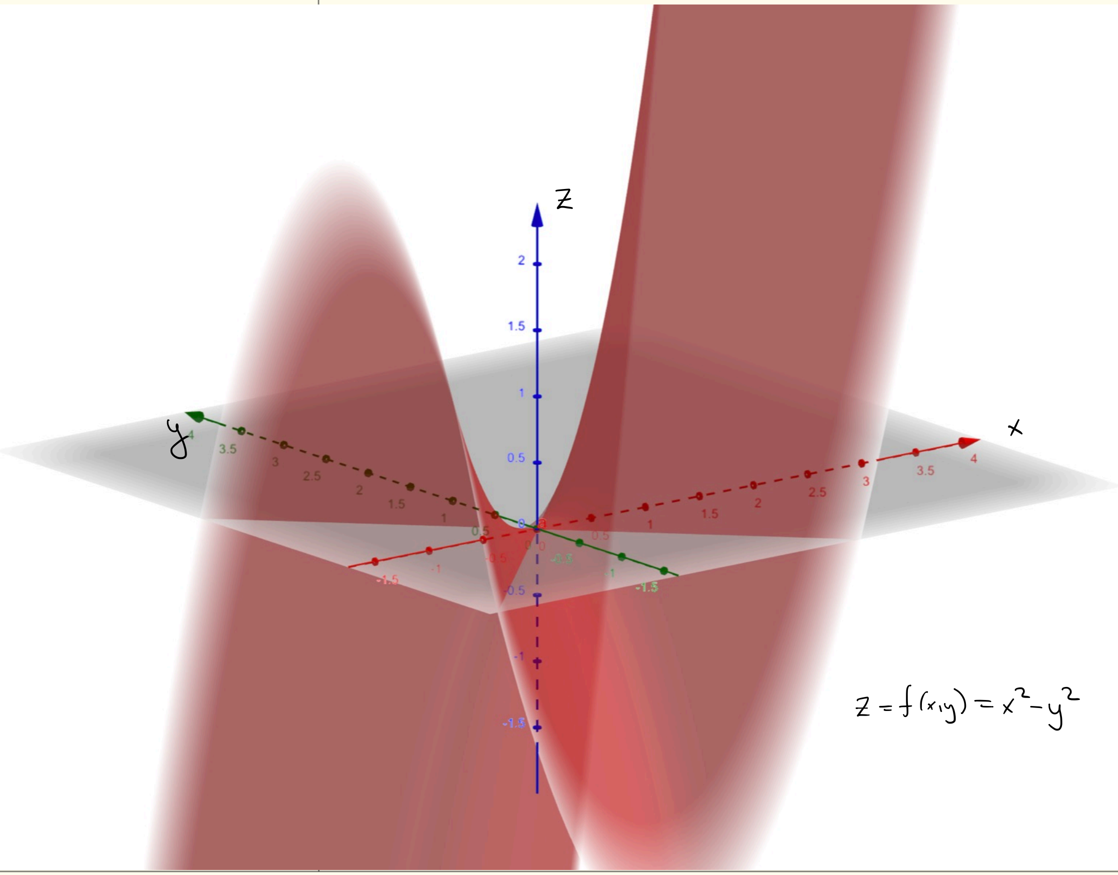
Sadelyta



Hyperbler



$z = f(x,y) = x^2 + y^2$



$z = f(x,y) = x^2 - y^2$

Gränsvärden

Definitionen för gränsvärde av en funktion är densamma i flera variabler som den är i en variabel. Låt oss skriva $d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|$ (avstånd mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$, $\underset{\text{variabel}}{d(x,y) = |x-y|}$ i en)

Låt $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap\!\!|}{A}} \longrightarrow \mathbb{R}$. Antag att för varje $r>0$ så finns $\vec{y} \in A$, $\vec{y} \neq \vec{a}$ så att $\vec{y} \in \{x \in \mathbb{R}^n ; d(\vec{x},\vec{a})<r\}$

<u>Def</u>: Vi skriver $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = L$ om det för varje $\varepsilon>0$ det finns $\delta>0$ så att $|f(\vec{x})-L|<\varepsilon$ om $0<d(\vec{x},\vec{a})<\delta$.

<u>Def</u> En funktion $f: A \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i $\vec{a} \in A$ om $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

Gränsvärden är krångligare i flera variabler än i en variabel. Innan vi ger exempel på dessa svårigheter låt oss formulera en sats.

Sats: Låt $f: A \to \mathbb{R}$ och $g: A \to \mathbb{R}$. Antag att $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = L$ och $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} g(\vec{x}) = M$. Då gäller

(i) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left(f(\vec{x}) \pm g(\vec{x}) \right) = L \pm M$

(ii) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) = L \cdot M$

(iii) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \dfrac{L}{M}$ om $M \neq 0$

Antag att $F(t)$ är kontinuerlig i $t = L$. Då gäller

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} F(f(\vec{x})) = F(L).$$

Man visar enkelt att $f_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ är kontinuerlig och därför får man att polynom i flera variabler är kontinuerliga.

Ex $f(x,y) = x^2 - y^2$ är kontinuerlig

$f(x,y) = x^3 + xy^2$ är kontinuerlig

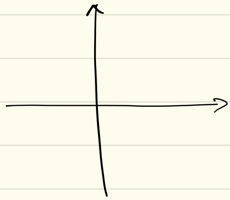
$f(x,y) = e^{(x^2 - y^2)} \cdot \sin(xy)$ är kontinuerlig

Låt oss nu studera "problem" som dyker upp i flera variabler.

Ex: Beräkna

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \text{ om det existerar}$$

$\frac{2xy}{x^2+y^2}$ är inte definierad då $(x,y)=(0,0)$



Låt oss nu närma oss origo längs x-axeln.
Där är $y=0$ så

$$\lim_{y\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$$

Detsamma gäller på y-axeln ($x=0$ där)
Så om gränsvärdet existerar så måste det vara 0.
Men om vi närmar oss på $x=y$ så får vi

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x^2} = 1.$$

Alltså gränsvärdet existerar ej!

Nu kanske man kan tycka att man kan kolla gränsvärdet på alla räta linjer och om dessa ger samma resultat så är det klart. MEN!

Ex

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

$y=kx$ ger olika räta linjer för olika k.

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2kx}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx}{x^2+k^2} = 0$$

Om vi går längs y-axeln ("$k=\infty$") så är $x=0$. Vi får $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

Alltså längs varje rät linje så är gränsvärdet 0. MEN på $y=x^2$ så får vi

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2\cdot x^2}{x^4+x^4} = 1.$$

Gränsvärdet existerar alltså inte!

Hur gör man för att vara säker? Man måste undersöka alla sätt att närma sig origo (eller punkten man undersöker) Polära koordinater är ofta användbara. (Bra: $\mathbb{R}^2$!)

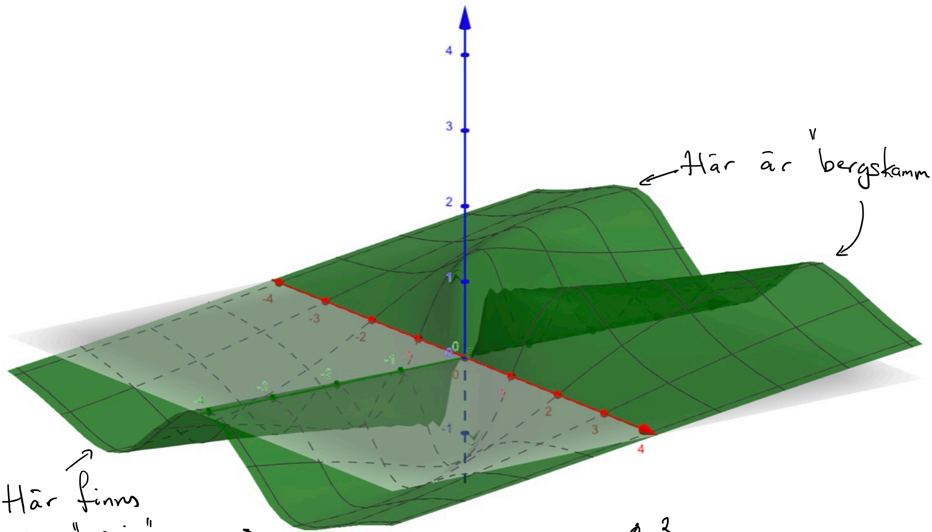
<u>Ex</u> Visa att $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

Inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta \, r\sin\theta}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r \sin\theta \cos^2\theta = 0.$$

Här är "bergskammen"



Här finns en "ravin"

$$\boxed{\text{Undersök } y = -x^2}$$

$$z = f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$