Partiella derivator

Vi börjar nu studera derivering i flera variabler. Precis som för gränsvärden och kontinuitet måste man ta hänsyn till att det finns fler än en riktning som man kan närma sig punkter längs. Ett sätt är att studera hur funktionen förändras när man förändrar en variabel i taget.

Vi formulerar definitionen endast för $n=2$. (Allt funkar precis likadant då vi har $n \geq 3$ också.)

Låt $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$

__Definition__: Partialderivatorna för $f(x,y)$ definieras som

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

⌜ Gör som vanligt! Behandla alla övriga variabler som konstanter ⌟

Ex $f(x,y) = x^3y^2 + x^4y + y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + x^4 + 4y^3$$

Notation: $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f_1$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = f_2$$

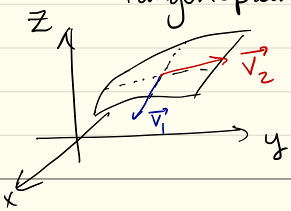
Ex Beräkna $f_x(0, 2\pi)$ då

$$f(x,y) = e^{xy}\sin(x-y)$$

$$f_x = ye^{xy}\sin(x-y) + e^{xy}\cos(x-y)$$

$$f_x(0,2\pi) = 2\pi e^0 \sin(-2\pi) + e^0\cos(-2\pi) = 1$$

Tangentplan för $z = f(x,y)$



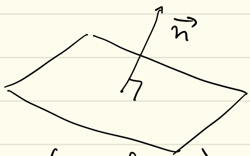
$$\vec{v}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\vec{v}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & f_x \\ 1 & f_y \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & f_x \\ 0 & f_y \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =$$

$$= (-f_x, -f_y, 1)$$



Tangentplanet genom $(a, b, f(a,b))$

$$0 = -f_x(a,b)(x-a) - f_y(a,b)(y-a) + 1(z - f(a,b))$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Avstånd från en punkt P i $\mathbb{R}^3$ till en yta. Detta är ett speciellt optimeringsproblem eftersom avståndet är definierat som det minsta avståndet från punkten P till punkter på ytan. Låt Q vara den närmaste punkten på ytan. En stunds funderade ger att $\vec{PQ}$ måste skära ytan i rät vinkel. Med andra ord $\vec{PQ}$ är parallell med normalen i punkten Q.

Ex Beräkna avståndet mellan $P=(3,0,0)$ och ytan $z=x^2-y^2$. Vi försöker hitta $Q=(x,y,z)$. Vi har $\overrightarrow{PQ}=(x-3,y,z)$. Normalen i Q är $\vec{n}=(-2x,2y,1)$. Vi kräver $\overrightarrow{PQ}=t\vec{n}$.

$$\begin{array}{l} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array} \begin{cases} x-3=-2xt \\ y=2ty \\ z=t \end{cases}$$

(ii) ger $y=0$ och/eller $t=1/2$

Fall 1 $\quad y=0$

$$x=\frac{3}{1+2t} \qquad z=t$$

$$z=x^2 \implies t=\frac{9}{(1+2t)^2}$$

$t=1$ ger en lösning (och den enda reella)

$\implies (x,y,z)=(1,0,1)$ är en kandidat

Fall 2 $\quad t=1/2$

$$z=1/2 \qquad x=3/2$$

$$y^2=x^2-z=9/4-1/2=7/4$$

3 kandidater

$(x,y,z)=(1,0,1)$: $\quad d((3,0,0),(1,0,1))=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

$(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right)$: $\quad d\left((3,0,0),\left(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right)\right)=$

$$=\sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$\frac{17}{4}<5 \implies Q=\left(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right)$ ligger närmast.

$\implies$ Avståndet från P till $z=x^2-y^2$ är $\sqrt{17}/2$ enheter.

Partialderivator av högre ordning

När man deriverar $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ med avseende på en variabel så får man en ny funktion $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ som också kan deriveras (kanske).

Ex Beräkna alla partiella derivator av ordning 2 till $f(x,y)=x^3y^4$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6xy^4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x^3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=12x^2y^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12x^2y^3$$

Notera att $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Är detta alltid sant? Nej, men vi har

Sats: Antag att två n:te ordningens partialderivator sker med avseende på samma variabler men i olika ordning. Om dessa är kontinuerliga i P och alla partialderivator av ordning n-1 och lägre är kontinuerliga i en omgivning av P (alla punkter i en liten boll som innehåller P) då är dessa partialderivator lika i P.

Ex $f(x,y) = e^{kx} \cos(ky)$

$$f_x = ke^{kx}\cos(ky) \qquad f_y = -ke^{kx}\sin(ky)$$

$$f_{xy} = -k^2 e^{kx} \sin(ky) \qquad f_{yx} = -k^2 e^{kx} \sin(ky)$$

Ex Antag att $F(x,y) = f(x-ct) + g(x+ct)$

Visa att $$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Denna partiella differential-ekvation kallas för (den endimensionella) vågekvationen

Kedjeregeln

I en variabel $\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

Hur funkar detta i flera variabler?

Vi skriver allt i två variabler men det funkar också för fler variabler.

Först $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(x(t), y(t)) = f(r(t)) = g(t)$$