$$\frac{\partial F}{\partial t} = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x-ct) + g'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Denna partiella differential-ekvation kallas för (den endimensionella) vågekvationen

## Kedjeregeln

I en variabel $\frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

Hur funkar detta i flera variabler?

Vi skriver allt i två variabler men det funkar också för fler variabler.

Först $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(x(t), y(t)) = f(r(t)) = g(t)$$

Hur beräknar man $g'(t)$?

$$g'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h}$$

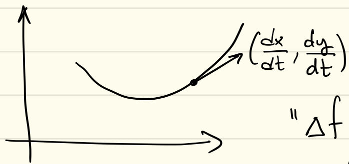
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t+h), y(t))}{h} +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$= y'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(r(t)) + x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(r(t)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$ Kedjeregeln




"$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y$"

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

differentialen av $f$

Nu $F(s,t) = (x(s,t), y(s,t))$

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$g(s,t) = f(F(s,t))$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Kedjeregeln

$$\begin{pmatrix} g_s \\ g_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

<u>Ex</u> $f(x,y) = x^2 + y^2$

Inför polära koordinater

$$x = r\cos\theta \qquad r > 0 \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$
$$y = r\sin\theta$$

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 2r \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = 2x\cos\theta + 2y\sin\theta =$$

$$= 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta = 2r$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = 2x(-r\sin\theta) + 2y(r\cos\theta) =$$

$$= 2r\cos\theta(-r\sin\theta) + 2r\sin\theta\, r\cos\theta = 0$$

## Differentialen till f

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ om $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$df$ är en funktion av $x,y$ och $dx, dy$ !

Detta är användbart för att uppskatta förändring.

"$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$"

Ex En pendel med längd $L$ svänger med period $T$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Säg att vi förlänger pendeln med 2% och $g$ minskar med 0,6% (vi flyttar pendeln). Hur mycket förändras $T$ ungefär.

$$T(L,g) = 2\pi\, L^{1/2} g^{-1/2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial L} = 2\pi \left(\frac{1}{2}\right) L^{-1/2} g^{-1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{Lg}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = -\pi\, L^{1/2} g^{-3/2} = -\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$dL = \frac{2}{100} L \qquad dg = -\frac{6}{1000} g$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial L} dL + \frac{\partial T}{\partial g} dg =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{Lg}} \frac{2}{100} L + \frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \frac{6}{1000} g =$$

$$= \left(\frac{1}{100} + \frac{3}{1000}\right) 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{13}{1000} T$$

Perioden $T$ ökar med 1,3 %.

## Linearisering och differentierbarhet

Kan man alltid hitta ett tangentplan till $z = f(x,y)$?

$z - c = A(x-a) + B(y-b)$ är ett plan.

Vi skulle vilja hitta ett plan så att

$$f(x,y) \approx f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)$$

Def $f(x,y)$ är differentierbar i $(a,b)$ om

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Vi noterar några saker:

- Om $f$ är differentierbar så är $f$ kontinuerlig
- Om $f$ är differentierbar så har $f$ partiella derivator. Dessutom så är $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ och $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

Sats Om $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i en omgivning (en liten disk) av $(a,b)$ då är $f$ differentierbar i $(a,b)$

## Riktningsderivata och gradient

Partialderivatorna beskriver hur en funktion förändras när vi rör oss längs koordinataxlarna. Men det finns ju fler riktningar. Vi kan också derivera i dessa förstås.