Vi skulle vilja hitta ett plan så att

$$f(x,y) \approx f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)$$

<u>Def</u> $f(x,y)$ är differentierbar i $(a,b)$ om

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Vi noterar några saker:

- Om $f$ är differentierbar så är $f$ kontinuerlig
- Om $f$ är differentierbar så har $f$ partiella derivator. Dessutom så är $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ och $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

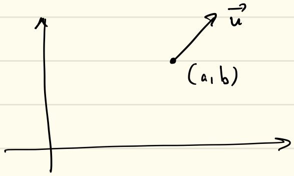
<u>Sats</u> Om $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i en omgivning (en liten disk) av $(a,b)$ då är $f$ differentierbar i $(a,b)$

## Riktningsderivata och gradient

Partialderivatorna beskriver hur en funktion förändras när vi rör oss längs koordinataxlarna. Men det finns ju fler riktningar. Vi kan också derivera i dessa förstås.

Låt $\vec{u} = (u_1, u_2)$ vara en enhetsvektor ($\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$). Vi definierar riktningsderivatan av $f$ i riktning $\vec{u}$ som

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}$$




I princip gäller $D_{\vec{u}} f \neq D_{-\vec{u}} f = -D_{\vec{u}} f$

Dessutom gäller

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2) \Big|_{t=0}$$

(alltså $g'(0)$ om $g(t) = f(a+tu_1, b+tu_2)$)

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu_1, b+tu_2) = u_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + u_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (u_1, u_2)$$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ kallas gradienten till $f$. Notera att detta ger en vektor i varje punkt i planet. Gradienten $\nabla f$ är ett vektorfält.

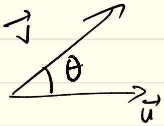
Vi får alltså

$$D_{\vec{u}}f = (\nabla f) \cdot \vec{u}$$

skalär produkten

Vi vet följande om skalärprodukten

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$




I detta fall

$$D_{\vec{u}}f = (\nabla f) \cdot \vec{u} \overset{\|\vec{u}\|=1}{=} \|\nabla f\| \cos\theta$$

$D_{\vec{u}}f$ är som störst om $\cos\theta = 1$. Med andra ord då $\theta = 0$. Alltså funktionen $f$ växer snabbast i gradientens riktning (om $\nabla f \neq \vec{0}$)

<u>Ex</u> Låt $f(x,y) = x^2 e^{-y}$. I vilken riktning växer $f$ snabbast i punkten $(2,1)$? Hur snabbt växer $f$ i denna punkt?

<u>Lösning:</u> $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xe^{-y}, -x^2e^{-y})$

$$\nabla f(2,1) = (4e^{-1}, -4e^{-1})$$

$$\vec{u} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

$D_{\vec{u}}f = \|\nabla f\|$ i denna riktning

$$D_{\vec{u}}f = \frac{4}{e}\|(1,-1)\| = \frac{4\sqrt{2}}{e} \quad \otimes$$

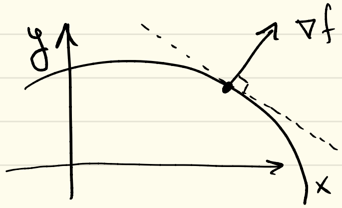
Åter till $D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = \|\nabla f\| \cos\theta$

Vi ser att $D_{\vec{u}}f = 0$ då $\cos\theta = 0$

Om vi tänker på nivåkurvor

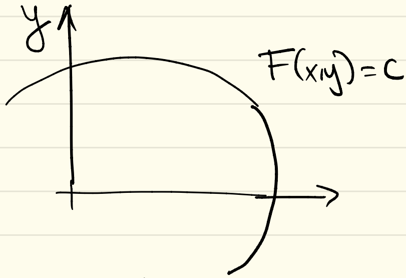
$$f(x,y) = C$$

Så ser vi att $\nabla f$ är en normalvektor till $f(x,y) = C$.



## Implicita funktioner

Ibland vill man lösa ut t.ex $y$ som en funktion av $x$ från $F(x,y) = C$




Vi kan säkert lösa ut $y(x)$ då tangentlinjen inte är parallell med y-axeln. Om $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ så är normalvektorn

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

inte parallell med x-axeln (och därmed är tangentlinjen inte parallell med y-axeln).
Alltså vi kan säkert skriva $y$ som en funktion av $x$ nära $x_0$ då

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

så att $F(x, y(x)) = C$ och $y(x_0) = y_0$

**Ex** $x^2+y^2=1$

Skriv $y$ som funktion av $x$ nära $(x,y)=(0,1)$

Lösning:

Först, går det? $\frac{\partial F}{\partial y}=2y=2\cdot 1\neq 0$ OK!

$y^2=1-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$

Alltså $y(x)=\sqrt{1-x^2}$ uppfyller

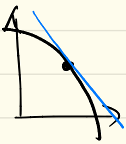
$x^2+y(x)^2=1$ samt $y(0)=1$.

Implicita funktionssatsen

Låt $F(x,y)$ vara differentiabel i $(x_0,y_0)$ och antag att $F(x_0,y_0)=C$. Antag dessutom att $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Då är det möjligt att skriva $y$ som en funktion av $x$ i ett intervall kring $x_0$ så att

$$F(x,y(x))=C \quad \text{och} \quad y(x_0)=y_0$$

**Ex** Beräkna tangentlinjens lutning till $x^2+y^2=2$ i punkten $(1,1)$



Metod 1

$y=\sqrt{2-x^2}$

Derivera osv.

**Metod 2** $F(x,y) = x^2+y^2-2=0$

$$\nabla F = (2x, 2y) \qquad \nabla F(1,1) = (2,2)$$

Hitta en vektor som är vinkelrät ov.

**Metod 3** Implicit derivering

$$x^2 + y(x)^2 = 2$$

Derivera med avseende på $x$

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0$$

$$y(x)\,y'(x) = -x$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

$$y'(1) = -\frac{1}{y(1)} = -\frac{1}{1} = -1$$

**Ex** $x^2y^2 + x^2 - y = 1$

Detta är en kurva i planet. Ange tangentlinjens ekvation genom $(x,y) = (1,0)$.

Först verifierar vi att $(x,y) = (1,0)$ ligger på kurvan. $F(x,y) = x^2y^2 + x^2 - y$. Vi beräknar $F(1,0) = 1^2 \cdot 0^2 + 1^2 - 0 = 1$. OK!

Vi undersöker om $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) \neq 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y - 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2 \cdot 1^2 \cdot 0 - 1 = -1 \neq 0$$

OK!

Tangentlinjen har ekvationen

$$y - 0 = y'(1)(x-1)$$

Vi beräknar $y'(1)$. Derivera $x^2y(x)^2 + x^2 - y(x) = 1$ implicit.

$$2xy(x)^2 + 2x^2y(x)y'(x) + 2x - y'(x) = 0$$

$$x = 1, \quad y(1) = 0$$

$$2 \cdot 1 \cdot y(1)^2 + 2 \cdot 1^2 y(1)y'(1) + 2 \cdot 1 - y'(1) = 0$$

ger

$$y'(1) = 2$$

Tangentens ekvation är

$$y = 2(x-1) = 2x - 2$$

Man kan också ha flera variabler och det funkar likadant.
Om $F(x,y,z) = C$ och $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ då kan man hitta $z(x,y)$ så

$$F(x,y,z(x,y)) = C$$

Det är också möjligt att flera ekvationer men då behöver man Jacobianen för att formulera resultatet. Vi studerar Jacobianen senare i kursen men hoppar över denna mer komplicerade version av implicita funktionssatsen.

## Taylorapproximation

I en variabel så approximerade vi svåra funktioner $f(x)$ med hjälp av enklare funktioner (polynom)
Kom ihåg

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

($\xi$ mellan $a$ & $x$)

Detta funkar också i flera variabler.