Man kan också ha flera variabler och det funkar likadant.

Om $F(x,y,z) = C$ och $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ då kan man hitta $z(x,y)$ så

$$F(x,y,z(x,y)) = C$$

Det är också möjligt att flera ekvationer men då behöver man Jacobianen för att formulera resultatet. Vi studerar Jacobianen senare i kursen men hoppar över denna mer komplicerade version av implicita funktionssatsen.

Taylorapproximation

I en variabel så approximerade vi svåra funktioner $f(x)$ med hjälp av enklare funktioner (polynom)

Kom ihåg

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(ξ mellan a & x)

Detta funkar också i flera variabler.

Vi formulerar resultatet i två variabler kring origo. Vi har

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y +$$
$$+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\,xy +$$
$$+ \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)\,x^3 + \frac{1}{2!\,1!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0)\,x^2 y + \dots +$$
$$+ \text{termer av ordning } n + \underbrace{\mathcal{O}\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n+1}\right)}_{\text{begränsas av } C\sqrt{x^2+y^2}^{\,n+1}}$$

<u>Ex</u> Ange Taylorpolynomet av grad 2 för

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y} \quad \text{kring} \quad (x,y) = (1,0)$$

$$f_x(x,y) = 2x\,(x^2+y)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} = x\,(x^2+y)^{-1/2}$$

$$f_y(x,y) = (x^2+y)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,(x^2+y)^{-1/2}$$

$$f_{xx}(x,y) = (x^2+y)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x\,(x^2+y)^{-3/2} =$$
$$= (x^2+y)^{-1/2} - x^2\,(x^2+y)^{-3/2}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{2}x(x^2+y)^{-3/2}$$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{4}(x^2+y)^{-3/2}$$

$$T_2(x,y) = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)\,y + \frac{1}{2!}f_{xx}(1,0)(x-1)^2$$

$$+ \frac{1}{1!1!}f_{xy}(1,0)(x-1)y + \frac{1}{2!}f_{yy}(1,0)\,y^2 =$$

$$= 1 + 1(x-1) + \frac{1}{2}y + 0(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)y - \frac{1}{8}y^2 =$$

$$= x + y - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{8}y^2 \qquad \otimes$$

Man kan ibland lura ut Taylorutvecklingen för implicita funktioner.

<u>Ex</u> $F(x,y) = \sin(x+y) - xy - 2x = 0$

Finns $y = f(x)$ så att $y = f(0) = 0$ och $F(x, f(x)) = 0$?

Först $F(0,0) = \sin 0 - 0 - 2\cdot 0 = 0$ ok!

$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos(x+y) - x \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \cos 0 - 0 = 1 \neq 0$

$\Longrightarrow y = f(x)$ existerar.

Låt oss försöka identifiera Taylorapproximationen till $y = f(x)$. Skriv $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Eftersom $f(0) = 0$ så är $a_0 = 0$.

$$\sin\left((1+a_1)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\right) = x\left(a_1 x + a_2 x^2 + \dots\right) + 2x$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$\left((1+a_1)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\right) - \frac{1}{3!}\left((1+a_1)x + a_2 x^2 + \dots\right)^3 + \dots =$$

$$= 2x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 + a_1 = 2 \\ a_2 = a_1 \\ a_3 - \dfrac{(1+a_1)^3}{6} = a_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1 + \dfrac{(1+1)^3}{6} = 1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Alltså $y = f(x) = x + x^2 + \frac{7}{3}x^3 + \dots$

Optimering

Hur hittar man största och/eller minsta värde för en funktion av flera variabler?

Låt oss först fundera på lokala max och min.

Låt oss tänka på grafen $z = f(x,y)$.

För att (a,b) skall kunna vara ett max eller min så måste tangentplanet (om det finns) vara parallellt med (x,y)-planet. $\Rightarrow \nabla f(a,b) = (0,0)$

Med andra ord så gäller $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

lokala max och min.

Man säger att (a,b) är en kritisk punkt för $f(x,y)$ då $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

Viktigt kriterium för att beskriva kritiska punkter

Låt oss antaga att $f(0,0) = 0$ och $\nabla f(0,0) = (0,0)$

Genom att Taylorutveckla så får vi

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2 f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2 \right)$$

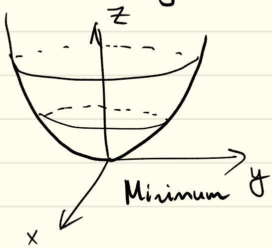
$$+ O\left(\sqrt{x^2+y^2}^{\,3} \right)$$

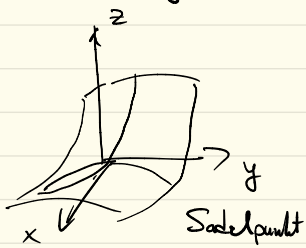
Denna avgör ofta om $(0,0)$ är ett lokalt max eller min.

Kvadratiska former

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

Ex $z = x^2 + y^2$ $\qquad\qquad$ $z = x^2 - y^2$





Slutligen

$z = -x^2 - y^2$ ger max

Vi skall nu se att detta är det typiska beteendet med hjälp av linjär algebra.

$$z = (x \quad y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (Ax+By \quad Bx+Cy)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

Notera att $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ är symmetrisk! Vi vet

(spektralsatsen) att en sån kan diagonaliseras.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^{-1}$$

ON-bas av egenvektorer

egenvärden

Om vi uttrycker (x,y) i ON-basen

$$(u_1,u_2) = (x,y)U \quad \text{så är}$$

$$z = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2.$$

<u>Hessianen</u> $\qquad H_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

Kriterium för max/min-punkt

Antag att $\nabla f(a,b) = (0,0)$. Om egenvärdena till $H_f(a,b)$ uppfyller

(i) $\lambda_i > 0$, $i=1,2$ ($H_f(a,b)$ positivt definit)
(a,b) är ett lokalt minimum

(ii) $\lambda_i < 0$, $i=1,2$ ($H_f(a,b)$ negativt definit)
(a,b) är ett lokalt maximum

(iii) $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (egenvärdena har olika tecken)
($H_f(a,b)$ indefinit)
(a,b) är en sadelpunkt
(varken lokalt min eller lokalt max)

Om något egenvärde är 0 då säger man att $H_f(a,b)$ är degenererad och vi kan inte avgöra om (a,b) är ett lokalt max, lokalt min eller en sadelpunkt.

Ex Hitta alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = xy - x + y$$

och klassificera dem.

Lösning:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y-1, x+1)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0)\,? \qquad y=1,\ x=-1$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(-1,1) = (0,0) \quad \text{kritisk punkt}$$

$$H_f(-1,1) = \,?$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärden för $H_f(-1,1)$?

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1$$

$\Rightarrow$ $(-1,1)$ är en sadelpunkt.