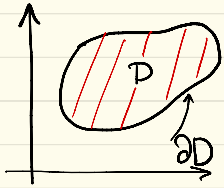
Optimering med bivillkor

Låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara kontinuerlig och D sluten och begränsad. Hur hittar man max/min?



① Leta kritiska punkter till $f : D \to \mathbb{R}$

② Leta singulära punkter till $f : D \to \mathbb{R}$

③ Leta max/min på ∂D

(Man kan göra detta genom att parametrisera ∂D)

Ex Hitta maximum och minimum för $f(x,y) = 2xy$ då $x^2 + y^2 \leq 4$.

Lösning: ① Kritiska punkter $(x,y) = (0,0)$
Där är H_f indefinit

② Inga singulära punkter

(3) Kandidater till max/min på ∂D.

Vi parametriserar $x^2+y^2=4$ (som är en cirkel med radie 2)

$$x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta \quad ; \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$g(\theta) = f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 2(2\cos\theta)(2\sin\theta) =$$
$$= 8\cos\theta\sin\theta$$

$$g'(\theta) = -8\sin^2\theta + 8\cos^2\theta$$

$$g'(\theta) = 0 \iff \tan^2\theta = 1 \iff \tan\theta = \pm 1$$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{4} \quad \text{och} \quad \theta = \pm\frac{3\pi}{4}$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = 8\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 4 = f(\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 8\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4 = f(\sqrt{2},-\sqrt{2})$$

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 8\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4 = f(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$g\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 8\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 4 = f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$$

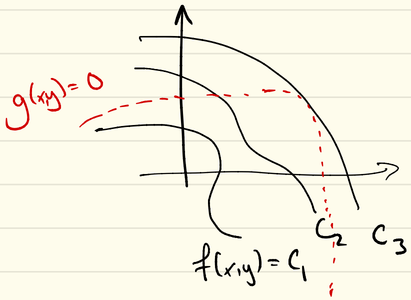
$$g(-\pi) = g(\pi) = 0$$

Maximum för $f(x,y) = 2xy$ då $x^2+y^2 \leq 4$ är 4 och fås i $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ och $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

Minimum fås i $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ och $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ och är -4.

Lagrangemultiplikatorer

Säg att vi vill maximera $f(x,y)$ då $g(x,y)=0$
Låt oss rita nivåkurvor till $f(x,y)$.



Vi ser i figuren att i punkter där f är maximal så gäller $\nabla f = \lambda \nabla g$

Så det verkar alltså vettigt att leta efter punkter där $\nabla f = \lambda \nabla g$ för något λ. Men vi måste komma ihåg att $g(x,y)=0$ också! Detta kan vi ta hand om automatiskt genom att bilda <u>Lagrangefunktionen</u>

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

och studera kritiska punkter till den.

$$\nabla L = \left(f_x + \lambda g_x ,\ f_y + \lambda g_y ,\ g(x,y) \right)$$

I en kritisk punkt till L har vi
$\nabla L = \vec{0} \iff \nabla f = -\lambda \nabla g$ & $g(x,y) = 0$

Det är viktigt att $\nabla g \neq \vec{0}$ för att denna analys skall funka. Dessutom är det så att metoden hittar lösningar <u>om</u> det finns.

<u>Ex</u> Hitta de punkter på kurvan $y = 16/x^2$ som ligger närmast origo.

<u>Lösning:</u>

Problemet har en lösning

Minimera $f(x,y) = x^2 + y^2$ då $g(x,y) = x^2y - 16 = 0$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) =$$

$$= x^2 + y^2 + \lambda(x^2y - 16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2xy\lambda \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2y - 16$$

(i) $2x + 2\lambda xy = 0 \Rightarrow 2x(1+\lambda y) = 0$

(ii) $2y + \lambda x^2 = 0$

(iii) $x^2 y = 16$

(i) ger $x = 0$ eller $1 + \lambda y = 0$

$x = 0$? motsäger (iii)

$\lambda y = -1$ Multiplicera (ii) med y

$$y(2y + \lambda x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2y^2 + \lambda y x^2 = 2y^2 - x^2 = 0$$

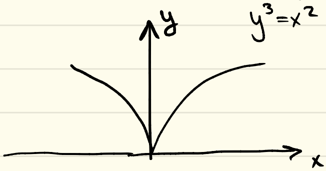
$$\Leftrightarrow x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}\, y$$

(iii) $x^2 y = 2y^3 = 16 \Leftrightarrow y = 2$

$\Rightarrow (x, y) = (\pm\sqrt{2}\,2, 2)$ ligger närmast origo

Det kan bli problem om $\nabla g = \vec{0}$.

Ex Minimera $f(x,y) = y$ då $g(x,y) = y^3 - x^2 = 0$



Vi ser att minimum fås då $(x,y) = (0,0)$. Dock är $\nabla g = (-2x, 3y^2)$ lika med $\vec{0}$ där. Låt oss se vad som händer om man använder Lagrangemultiplikatorer.

$$L(x,y,\lambda) = y + \lambda(y^3 - x^2)$$

(i) $\frac{\partial L}{\partial x} = -2x\lambda = 0 \Rightarrow x = 0$ eller $\lambda = 0$

(ii) $\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 3\lambda y^2 = 0$

(iii) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y^3 - x^2 = 0$

$\lambda = 0$ motsäger (ii)

$x = 0$ ger att $y = 0$ från (iii) vilket motsäger (ii)

Metoden med Lagrangemultiplikatorer ger inget.

Man kan också ha flera bivillkor!

Maximera $f(x,y,z)$ då $g(x,y,z)=0$ och $h(x,y,z)=0$

Bilda $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$
och leta punkter där $\nabla L = \vec{0}$.

Minsta kvadratmetoden

Säg att vi har en fysikalisk egenskap hos ett system som vi vill mäta. På grund av mätfel (och andra saker kanske) får vi inte samma mätvärde varje gång. Säg att vi får $c_1, c_2, \dots, c_n$. En bra gissning för det korrekta mätvärdet $\bar{c}$ borde vara det värde som ligger närmast $c_1, \dots, c_n$. Vad menar vi med närmast? Vi minimerar

$$T(x) = (x-c_1)^2 + (x-c_2)^2 + \dots (x-c_n)^2 \quad \text{då } x \in \mathbb{R}$$

$$T'(x) = 2(x-c_1) + 2(x-c_2) + \dots 2(x-c_n)$$
$$= 2xn - 2\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$$

Minimum fås då $x = \frac{1}{n}\sum c_j = \underbrace{\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} = \bar{c}}_{\text{Medelvärdet.}}$