Man kan också ha flera bivillkor!

Maximera $f(x,y,z)$ då $g(x,y,z)=0$ och $h(x,y,z)=0$

Bilda $L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$ och leta punkter där $\nabla L = \vec{0}$.

Minsta kvadratmetoden

Säg att vi har en fysikalisk egenskap hos ett system som vi vill mäta. På grund av mätfel (och andra saker kanske) får vi inte samma mätvärde varje gång. Säg att vi får $c_1, c_2, \ldots, c_n$. En bra gissning för det korrekta mätvärdet $\bar{c}$ borde vara det värde som ligger närmast $c_1, \ldots, c_n$. Vad menar vi med närmast? Vi minimerar

$$T(x) = (x-c_1)^2 + (x-c_2)^2 + \ldots (x-c_n)^2 \quad \text{då } x \in \mathbb{R}$$

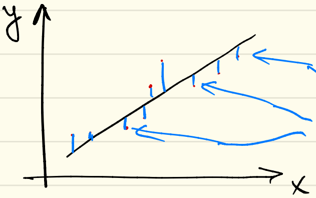
$$T'(x) = 2(x-c_1) + 2(x-c_2) + \ldots 2(x-c_n)$$
$$= 2xn - 2\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$$

Minimum fås då $x = \frac{1}{n}\sum c_j = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} = \bar{c}$

Medelvärdet.

Linjär regression

Säg nu att vi har en modell som säger att $y = ax+b$. Vi skulle vilja hitta a & b som passar bäst. På grund av mätfel och förenklingar i modellen får vi datapunkter $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_n,y_n)$ som <u>inte</u> ligger på en rät linje.



Vi försöker finna a & b så att summan av dessa avstånd^2 minimeras

$$S(a,b) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - ax_j - b)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{j=1}^{n} x_j(y_j - ax_j - b) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{j=1}^{n} (y_j - ax_j - b) = 0$$

(1) $$a\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) + b\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)$$

(2) $$a\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + nb = \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

Multiplicera (1) med n och (2) med $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)$

$$\Longrightarrow \quad (1) \quad bn\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = n\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right) - na\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$$

$$(2) \quad bn\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) - a\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

Vi inför notation $\overline{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ osv.

$$n^2\,\overline{xy} - n^2\,\overline{x^2}\,a = n^2\,\overline{y}\,\overline{x} - an^2\left(\overline{x}\right)^2$$

$$\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} = a\left(\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}$$

Stoppa in i $\quad bn\overline{x} = n\overline{xy} - n\overline{x^2}a$

$$b\overline{x} = \overline{xy} - \overline{x^2}\left(\frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad b = \frac{1}{\overline{x}}\;\frac{\overline{xy}\,\overline{x^2} - \overline{xy}\left(\overline{x}\right)^2 - \overline{x^2}\,\overline{xy} + \overline{x^2}\,\overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{xy}\,\overline{x}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}$$

$y = ax + b$ med dessa värden kallas den empiriska regressionslinjen.

Ex $(x,y) = \{(1,1), (2,3), (3,4)\}$

$$\overline{x} = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2 \qquad \overline{y} = \frac{1}{3}(1+3+4) = \frac{8}{3}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^2) = \frac{14}{3} \qquad \overline{xy} = \frac{1}{3}(1+6+12) = \frac{19}{3}$$

$$a = \frac{19/3 - 2 \cdot 8/3}{14/3 - 4} = \frac{1}{2/3} = 3/2$$

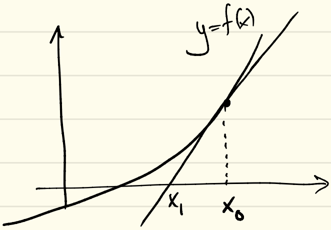
$$b = \frac{14/3 \cdot 8/3 - 19/3 \cdot 2}{14/3 - 2^2} = \ldots = -1/3$$

Newtons metod

Ofta, t.ex. när man använder Lagrangemultiplikatorer, behöver man lösa system av icke-linjära ekvationer. Säg att vi vill lösa

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{lika många ekvationer} \\ \text{som obekanta}\end{array}\right)$$

Vi skall generalisera Newtons metod i en variabel. Låt oss påminna oss om hur den fungerar.



$f(x)=0$?

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

Vi får approximation till $f(x)=0$ genom att lösa

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = 0$$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Fortsätt tills du är nöjd. $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Samma idé i flera variabler
Ersätt ett system med icke-linjära ekvationer med ett system av linjära ekvationer som kan lösas.

Taylorutveckling ger

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$g(x,y) \approx g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Vi löser

$$\begin{cases} f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \\ g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \end{cases}$$

eller ekvivalent

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = -f(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0) = -g(x_0,y_0) \end{cases}$$

som kan lösas på vanligt sätt.

Cramers regel ger en sluten formel

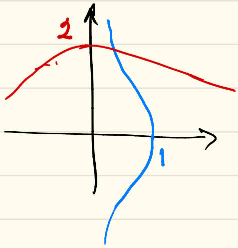
$$x - x_0 = \begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

$$y - y_0 = \begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n - \begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \\ y_{n+1} = y_n - \begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \end{cases}$$

Ex Lös $\begin{cases} x(1+y^2)=1 \\ y(1+x^2)=2 \end{cases}$ approximativt

Lösning:



Vi gissar $(x_0, y_0) = (0{,}2,\ 1{,}8)$

Vi får $f(0{,}2,\ 1{,}8) = 0{,}2(1+1{,}8^2)-1 = -0{,}152$

och $g(0{,}2,\ 1.8) = 1.8(1+0.2^2)-2 = -0.128$

$$f_x = 1+y^2,\quad f_y = 2xy,\quad g_x = 2xy,\quad g_y = 1+x^2$$

$f_x(0.2,1.8) = 4{,}24$, $f_y(0.2,1.8) = 0.72 = g_x(0.2,1.8)$,

$g_y(0.2,1.8) = 1.04$

$$x_1 = 0{,}2 - \begin{vmatrix} -0.152 & 0.72 \\ -0.128 & 1.04 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 4.24 & 0.72 \\ 0{,}72 & 1.04 \end{vmatrix} = 0{,}216941$$

$$y_1 = 1{,}8 - \begin{vmatrix} 4.24 & -0.152 \\ 0{,}72 & -0{,}128 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 4{,}24 & 0{,}72 \\ 0{,}72 & 1{,}04 \end{vmatrix} = 1{,}91349$$

$f(x_1, y_1) = 0{,}009481 \qquad g(x_1, y_1) = 0{,}001303$

fortsätt om det behövs