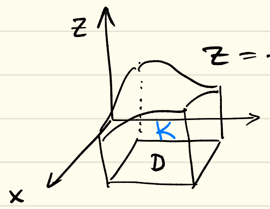
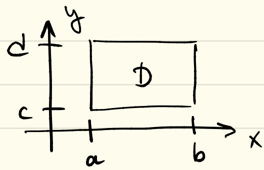
Dubbelintegraler

Säg att vi vill beräkna volymen



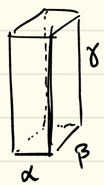
$z = f(x,y) \geq 0$

Volymen av $K = V$



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; a \leq x \leq b, \; c \leq y \leq d \}$$

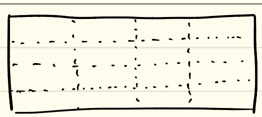
Precis som i en variabel approximerar man V inifrån och utifrån med enklare geometriska former. I en variabel rektanglar och här rätblock.



Volymen av denna är

$$\alpha \beta \gamma = (\alpha \beta) \gamma =$$
$$= (\text{arean av basen}) \cdot \text{höjden}$$

Vi delar upp D i mindre rektanglar



Vi får en summa av volymer som är mindre än den sökta och en summa av volymer som är större än den sökta. Om undersummor och översummor konvergerar mot samma tal V då vi gör uppdelningar av D finare och finare så skriver vi

$$\iint_D f(x,y)\,dA = V$$

Konstruktionen funkar om $f(x,y)$ är kontinuerlig (även om f är negativ)

Det finns ingen direkt generalisering av integralkalkylens fundamentalsats i flera variabler. Vi kan dock beräkna dubbelintegraler som itererade integraler.

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

<u>Ex</u> $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \}$

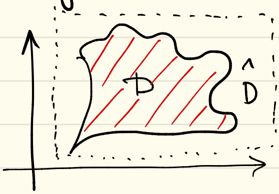
$f(x,y) = x^2 + y$ Beräkna $\iint_D x^2 + y\,dA$

$$\iint_D x^2+y\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2+y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_{x=0}^{x=1} dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} + y\,dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Dessutom
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 + y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx =$$
$$= \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2} \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Vi skulle vilja definiera $\iint_D f(x,y)\,dA$ då D inte nödvändigtsvis är en rektangel.



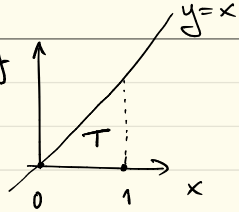
$$\iint_D f(x,y)\,dA = ?$$
$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{då } (x,y) \in D \\ 0 & \text{då } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Vi definierar $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{\hat{D}} \hat{f}(x,y)\,dA$

Här finns ett litet problem. $\hat{f}(x,y)$ behöver inte vara kontinuerlig på $\hat{D}$ även om $f(x,y)$ är det på D. Om randen för D inte är för "vild" så orsaker detta inga problem. Man kan också beräkna dessa som itererade integraler.

<u>Ex</u>: Beräkna $\iint_T xy\,dA$ då T är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

Lösning:

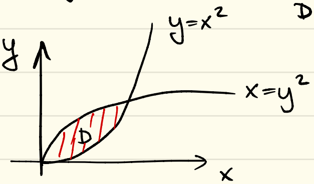


$$\iint_T xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}$$

Alternativ: $\iint_T xy\,dA = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx \right) dy =$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2y}{2} \right]_{x=y}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{y}{2} - \frac{y^3}{2}\,dy =$$
$$= \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Ex Låt D vara det begränsade området i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y=x^2$ och $x=y^2$. Beräkna $\iint_D x^2y\,dA$

Lösning:



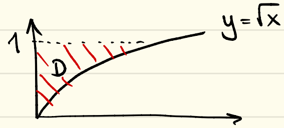
$$\iint_D x^2 y \, dA = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{2} \, dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{14} \right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{14} =$$

$$= \frac{7}{56} - \frac{4}{56} = \frac{3}{56}$$

<u>Ex</u> Beräkna $I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} \, dy \right) dx$

<u>Lösning:</u>



$$I = \iint_D e^{y^3} \, dA = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{y^3} \, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left[x e^{y^3} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} \, dy =$$

$$= \begin{bmatrix} t = y^3 \\ dt = 3y^2 dy \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \int_0^1 e^t \, dt = \frac{1}{3} \left[e^t \right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{1}{3} (e^1 - e^0) = \frac{e-1}{3}$$

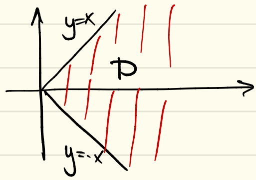
Generaliserade integraler

$\iint_D f(x,y)\,dA$ då D är obegränsad och/eller $f(x,y)$ obegränsad.

Denna teori är komplicerad i allmänhet. Men om man kräver att $f(x,y) \geq 0$ så räcker den endimensionella teorin. Man försöker beräkna integralen som en itererad integral och märker under räkningarnas gång om något går på tok.

Ex Beräkna $I = \iint_D e^{-x^2}\,dA$ där

$$D = \{(x,y) \in R^2 \,;\, x \geq 0 \text{ och } -x \leq y \leq x\}$$



$$I = \int_0^\infty \left(\int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dy\right) dx = \int_0^\infty 2xe^{-x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N 2xe^{-x^2}\,dx =$$

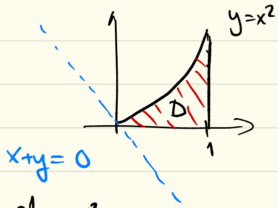
$$= \begin{bmatrix} t = x^2 & t_0 = 0 \\ dt = 2x & t_N = N^2 \end{bmatrix} = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N^2} e^{-t}\,dt = \lim_{N\to\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^{N^2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 1 - e^{-N^2} = \underline{1}$$

<u>Ex</u> Beräkna $I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dA$ där D ges av olikheterna

$$0 \le x \le 1 \quad \text{och} \quad 0 \le y \le x^2$$

<u>Lösning:</u>



I är en generaliserad integral eftersom $f(x,y)$ är obegränsad i D.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy \right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \Big[-(x+y)^{-1} \Big]_{y=0}^{y=x^2} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1+x-1}{x(1+x)}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[\ln(1+x) \Big]_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln 2 - \ln(1+\varepsilon) = \ln 2$$

Trippel- och multipelintegraler funkar på samma sätt

<u>Ex</u> Låt T vara tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,1)$. Beräkna

$$\iiint_T y \, dV.$$