Demo-uppgifter 1

1 Beräkna längden av kurvan

$$\vec{r}(t) = (t, t^{3/2}, -t)$$

då $0 \le t \le 1$.

Lösning: Vi beräknar $l = \int_0^1 |\vec{r}\,'(t)|\,dt$.

$$\vec{r}\,'(t) = \left(1, \tfrac{3}{2}t^{1/2}, -1\right)$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{3}{2}t^{1/2}\right)^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{2 + \tfrac{9}{4}t}$$

$$l = \int_0^1 |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^1 \left(2 + \frac{9t}{4}\right)^{1/2} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = 2 + \frac{9}{4}t \\ du = \frac{9}{4}dt \end{array}\right] = \frac{4}{9}\int_2^{17/4} u^{1/2}\,du =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_2^{17/4} = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2} - \sqrt{8}\right)$$

(2) Beräkna längden av kurvan

$$\vec{r}(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$$

då $0 \le t \le 2\pi$.

<u>Lösning</u>: $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t + \sin t + t\cos t, \cos t - \cos t + t\sin t)$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = |t|$$

$$\text{Kurvans längd} = \int_0^{2\pi} |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |t|\,dt =$$

$$= \left[t^2/2 \right]_0^{2\pi} = \frac{(2\pi)^2}{2} = 2\pi^2 \text{ l.e.}$$

(3) Kurvan $\vec{r}(t) = (t^2, t^3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, har en självskärning i punkten $(1,0)$ (då $t = -1$ och $t = 1$). Visa att kurvan skär sig själv rätvinkligt där.

<u>Lösning</u>: Vi verifierar först att $\vec{r}(-1) = \vec{r}(1)$.

$$\vec{r}(-1) = ((-1)^2, (-1)^3 - (-1)) = (1, -1+1) = (1,0)$$

$$\vec{r}(1) = (1^2, 1^3 - 1) = (1,0)$$

Vi undersöker tangentvektorerna $\vec{v}_1 = \vec{r}\,'(-1)$ och $\vec{v}_2 = \vec{r}\,'(1)$.

Vi beräknar $\vec{r}\,'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$. Detta ger $\vec{v}_1 = \vec{r}\,'(-1) = (2(-1), 3(-1)^2 - 1) = (-2, 2)$ och $\vec{v}_2 = \vec{r}\,'(1) = (2 \cdot 1, 3 \cdot 1^2 - 1) = (2, 2)$. Vi ser att $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -4 + 4 = 0$ och därför skär kurvan sig själv rätvinkligt.

Hemtal 1

1 Parametrisera ellipsen

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=4$$

Lösning: Vi skriver om ekvationen som

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1 \quad \text{och får}$$

$$\left(\frac{x}{6}\right)^2+\left(\frac{y}{2\sqrt{3}}\right)^2=1 \quad \text{efter ytterligare en omskrivning.}$$

Vi vet att $(\cos t)^2+(\sin t)^2=1;\ 0\le t\le 2\pi$

och sätter därför

$$\begin{cases}\frac{x}{6}=\cos t\\ \frac{y}{2\sqrt{3}}=\sin t\end{cases} \quad \text{vilket ger} \quad \begin{cases}x=6\cos t\\ y=2\sqrt{3}\sin t\end{cases};\ 0\le t\le 2\pi$$

2 Beräkna längden av kurvan

$$r(t)=(3t^2,2t^3),\quad 0\le t\le 1.$$

Lösning: Vi beräknar $l=\int_0^1 \|r'(t)\|\,dt$.

$$r'(t)=(6t,6t^2) \quad \text{ger} \quad \|r'(t)\|=\sqrt{6^2t^2+6^2t^4}=$$

$$=6|t|\sqrt{1+t^2}$$

$$l = \int_0^1 6t\sqrt{1+t^2}\,dt = \left[\begin{array}{l} u = 1+t^2 \\ du = 2t\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_1^2 3u^{1/2}\,du = 3\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 =$$

$$= 2(2\sqrt{2}-1) \text{ l.e}$$

Svar: Kurvans längd är $2(2\sqrt{2}-1)$ l.e.

(3) Låt $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$. För vilka punkter (x,y) i planet är funktionen definierad? Skissa $f(x,y) = C$ för $C=-2, C=-1, C=0, C=1$ och $C=2$.
Existerar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Lösning: Funktionen är definierad då $x+y \neq 0$ (Vi får inte dividera med 0!)
Alltså funktion är definierad då $y \neq -x$
Vi undersöker nu nivåkurvorna

$$\frac{x-y}{x+y} = C \iff x-y = Cx+Cy$$

$$\iff Cy+y = x-Cx \iff$$

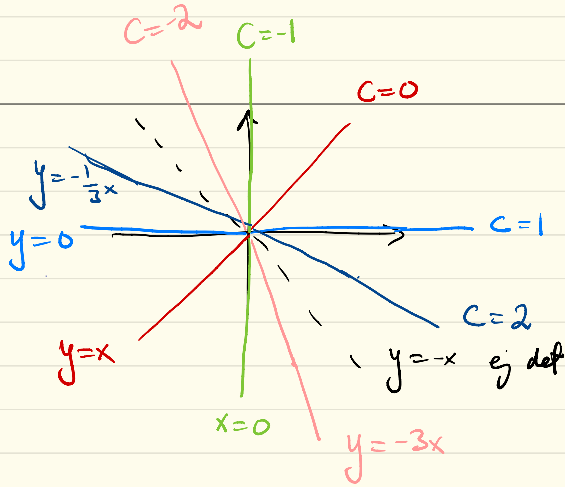
$$\iff (C+1)y = (1-C)x$$

Om $C \neq -1$ så får vi $y = \dfrac{1-C}{C+1}x$

Om $C=-1$ så får vi $0 = (1-C)x = 2x$

$$\iff x = 0$$

Detta ger



Eftersom flera nivåkurvor möts i origo kan inte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ existera.}$$

Inlämningsuppgift 1

1. Parametrisera skärningskurvan mellan

$$z = x^2 + y^2$$

och

$$z = 6x + 2y$$

<u>Lösning</u>: Vi börjar genom att parametrisera projektionen av skärningskurvan till (x,y)-planet. Vi gör detta genom att först studera

$$x^2 + y^2 = 6x + 2y$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Detta är en cirkel med radie $\sqrt{10}$ och centrum $(3,1)$

Vi parametriserar den $x(t) = 3 + \sqrt{10}\cos t$, $y(t) = 1 + \sqrt{10}\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

Eftersom $z = 6x + 2y$ så får vi

$$z(t) = 6x(t) + 2y(t) = 18 + 6\sqrt{10}\cos t + 2 + 2\sqrt{10}\sin t$$
$$= 20 + 6\sqrt{10}\cos t + 2\sqrt{10}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Parametriseringen blir $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) =$

$$= (3 + \sqrt{10}\cos t,\ 1 + \sqrt{10}\sin t,\ 20 + 6\sqrt{10}\cos t + 2\sqrt{10}\sin t)$$

för $0 \le t \le 2\pi$.

(2) Låt $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
Beräkna kurvans längd.

Lösning: $l = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt$.

$$\vec{r}\,'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} =$$
$$= \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}$$

Eftersom $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
ger $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ vilket i vårt
fall ger

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{2(1 - \cos t)} = \sqrt{2 \cdot 2\sin^2(t/2)} =$$
$$= 2\,|\sin(t/2)|$$

Alltså $l = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} 2\,|\sin(t/2)| \, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2) \, dt = \Big[-4\cos(t/2)\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= -4(\cos\pi - \cos 0) = -4 \cdot (-2) = 8 \text{ l.e}$$

Svar: Kurvans längd är 8 l.e.

③ Är funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

kontinuerlig i origo?

Lösning: Vi behöver kontrollera om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0$$

Om detta gäller så är funktionen kontinuerlig i origo.
Vi undersöker gränsvärdet längs x-axeln och y-axeln.

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Eftersom $1 \neq 0$ så kan inte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existera och därför gäller inte $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

Svar: $f(x,y)$ är inte kontinuerlig i origo.