Luku 2: Dynaamiset mallit, differentiaaliyhtälöt, tilaesitys ja linearisointi

Aalto-yliopisto

Tänään

- Systeemit ja niiden mallit
- Prosessien mallintaminen ja simulointi
- Tilaesitys
- Tilamuuttujien valinta ja tilaesityksen muodostaminen
- Epälineaarisen systeemin linearisoiminen
- Esimerkkejä

- Kotitehtävä 1 (KT1) julkaistaan tänään.
- Laskutupa alkaa pyöriä huomenna torstaina. Tavalliset laskuharjoitukset ovat normaalisti torstaina ja tiistaina.

Aalto-yliopisto

Mihin tarvitaan malleja säätötekniikassa?

- Systeemin ymmärtämiseen
  - Kausaliteetin selvittäminen
  - Simulointi
  - Systeemin analysointi (stabiilius, nopeus, värähtelyt, minimivaiheisuus, epälineaarisuus, ...)
- Systeemin hallintaan
  - Mallipohjaiset hallintastrategiat
- Säädetyn järjestelmän analysointiin
  - Teoreettinen hallintastrategian analysointi (stabiilius, nopeus, häiriönsietokyky, nousuaika, ylitys, pysyvä poikkeama, värähtelyn vaimentuminen, …)
  - Simulointi

Aalto-yliopisto

Mallit

- Dynaaminen / Staattinen malli
- Lineaarinen / Epälineaarinen malli
- Jatkuva-aikainen / Diskreettiaikainen malli
- Aikavariantti / Aikainvariantti malli
- Deterministinen / Stokastinen malli
- MIMO- / SISO-malli
- Koottujen parametrien / Jakautuneiden parametrien malli
- Parametroitu / Ei-parametroitu malli
- Kokeellinen / Teoreettinen malli
- Kvalitatiivinen malli /Kvantitatiivinen malli
- Lokaali / Globaali malli
- Matemaattinen / Ei-matemaattinen malli

Aalto-yliopisto

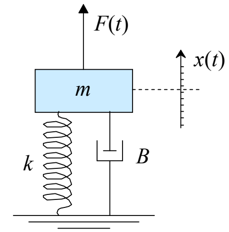
Mallit

- Tällä kurssilla käsitellään lähinnä dynaamisia, lineaarisia, jatkuva-aikaisia, aikainvariantteja, deterministisiä, koottujen parametrien, parametrisoituja, kvantitatiivisia, matemaattisia malleja
- Tarkastellaan muutamia tärkeitä malliluokkia yksityiskohtaisemmin

Esimerkki 2. Dynaamiset / staattiset mallit

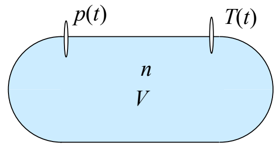
- Järjestelmä on dynaaminen kun sen tila on funktio aikaisemmasta tilasta (järjestelmällä on muistia ja hitautta).
  - Esim. Ulkoisen voiman F vaikutus massakappaleen paikkaan x - johdetaan voimataseesta (m on massa, k jousivakio ja B vaimennuskerroin)

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$



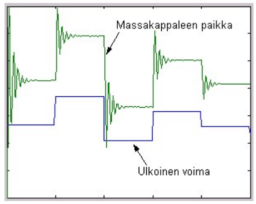
- Staattinen järjestelmä ei riipu aikaisemmasta tilasta (muistiton ja hitaukseton järjestelmä).
  - Esim. Lämpötilan T vaikutus paineeseen p suljetussa, eristetyssä säiliössä - johdetaan ideaalikaasulaista (n on ainemäärä, V tilavuus ja R kaasuvakio)

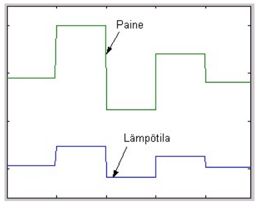
$$p(t)V = nRT(t)$$



Esimerkki 2. Dynaamiset / staattiset mallit

- Tehdään simuloinnit, joissa muutetaan mekaanisessa järjestelmässä ulkoista voimaa ja kaasusäiliössä lämpötilaa askelmaisesti.
  - Dynaamisessa järjestelmässä vaste muuttuu pitkään senkin jälkeen, kun heräte on jo tasaantunut. Vastetta ei voida määrittää ainoastaan saman hetken herätteen arvon perusteella - on tunnettava systeemin historia.
  - Staattisessa järjestelmässä heräte ja vaste muuttuvat samoilla ajanhetkillä ja vaste voidaan määrittää suoraan saman hetken herätteen arvon perusteella. Kausaliteetilla ei ole merkitystä: On sama muutetaanko painetta vai lämpötilaa … toinen muuttuja seuraa ja vaste on sama.





Lineaariset / epälineaariset mallit

- Järjestelmä on lineaarinen, jos se täyttää seuraavat ehdot
  - Jos heräte u_1 aiheuttaa vasteen y_1, niin heräte Ku_1 aiheuttaa vasteen Ky_1 (K on mielivaltainen vakio).
  - Jos heräte u_1 aiheuttaa vasteen y_1 ja heräte u_2 vasteen y_2, niin heräte (u_1+u_2) aiheuttaa vasteen (y_1+y_2).
- Testaamalla voidaan todeta, että esimerkin 1 venttiili on epälineaarinen järjestelmä ja esimerkin kaksi kaasusäiliö on lineaarinen järjestelmä
  - Venttiili

$$F_{in}(t) = k \cdot x(t) \cdot \sqrt{p(t) - p_i}$$

  - Jos paine muuttuu kaksinkertaiseksi arvosta $2p_i$ arvoon $4p_i$ (ja kaikki muut muuttujat säilyvät ennallaan), niin virtaus muuttuu seuraavasti:
  - Alkutilanteessa:

$$F_{in} = kx\sqrt{2p_i - p_i} = kx\sqrt{p_i}$$

  - Muutoksen jälkeen:

$$F_{in} = kx\sqrt{4p_i - p_i} = kx\sqrt{3p_i} = \sqrt{3}kx\sqrt{p_i} \neq 2 \cdot kx\sqrt{p_i}$$

Lineaariset / epälineaariset mallit

- Kaasusäiliö $p(t)V = nRT(t) \quad \Leftrightarrow \quad p(t) = \frac{nR}{V} T(t)$
- Jos heräte muuttuu K-kertaiseksi, niin vaste muuttuu myös K-kertaiseksi. Vaste on heräte kerrottuna vakiolla nR/V

- Yleisesti differentiaaliyhtälö on lineaarinen, jos sen jokainen summan termi on muotoa :

$$\text{vakio} \cdot (\text{muuttuja tai sen n:s derivaatta})^1$$

  - esim:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) - 5y(t) = 2\dot{u}_1(t) - u_1(t) + 3\ddot{u}_2(t) - 2u_2(t)$$

- Todelliset järjestelmät ovat lähes aina epälineaarisia, mutta niitä voidaan usein approksimoida lineaarisilla malleilla.

[1] Pistenotaatio tarkoittaa aina derivaattaa ajan suhteen

Jatkuva-aikaiset / diskreettiaikaiset mallit

- Jatkuva-aikaiset, dynaamiset mallit ovat differentiaaliyhtälöitä tai -yhtälöryhmiä
  - esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

- Diskreettiaikaiset, dynaamiset mallit ovat differenssiyhtälöitä tai -yhtälöryhmiä
  - esim koron laskenta:

$$y(t_k + 1) = 1.07 \cdot y(t_k) - u(t_k + 1)$$

Jakautuneiden / koottujen parametrien mallit

- Jakautuneiden parametrien mallit ovat osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tai -yhtälöryhmiä. Aikaderivaattojen (merkitään yleensä pisteellä) lisäksi näissä on paikkaderivaattoja (merkitään yleensä pilkulla) eri akseleiden suhteen
  - Esim. nesteen pitoisuuden C muuttuminen putkessa ajan t ja putken pituuden z funktioina, virtauksen v ja diffuusion/dispersion D johdosta.

$$\frac{\partial C(t,z)}{\partial t} = -v \frac{\partial C(t,z)}{\partial z} + D \frac{\partial^2 C(t,z)}{\partial z^2} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{C}(t,z) = -vC'(t,z) + DC''(t,z)$$

- Koottujen parametrien malleissa on ainoastaan aikaderivaattoja
  - esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä:

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

  - Usein jakautuneiden parametrien mallia voidaan approksimoida usealla koottujen parametrien mallilla

Aikavariantit / aikainvariantit mallit

- Aikavarianteissa malleissa mallin parametrit muuttuvat ajan funktiona
  - Esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä, jossa massa muuttuu ajan funktiona (massa koostuu hiekasta, jota lastataan eri tapauksissa eri määrät)

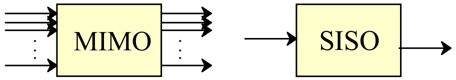
$$m(t)\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

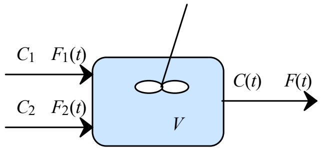
- Aikainvarianteissa malleissa malliparametrit ovat vakioita.

- Tyypillisesti kaikki todelliset järjestelmät ovat aikavariantteja (kuluminen, likaantuminen, muuttuvat ympäristöolosuhteet, mutta monissa tapauksissa aikavarianttisuus on niin vähäistä, ettei sitä tarvitse ottaa huomioon.

MIMO- / SISO-mallit

- MI - Multiple Input
- SI - Single Input
- MO - Multiple Output
- SO - Single Output
  - SISO: esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä - yksi heräte: ulkoinen voima - yksi vaste massakappaleen paikka $m\ddot{x}(t)+B\dot{x}(t)+kx(t)=F(t)$
  - MIMO: sekoitusprosessi, jossa sekoitetaan kaksi eri-pitoisuuksista virtausta yhteen - kaksi herätettä: virtaukset F_1 ja F_2 - kaksi vastetta: poistovirtaus F ja sen pitoisuus C





$$\begin{cases}\dfrac{dC(t)}{dt}=\dfrac{C_1-C(t)}{V}F_1(t)+\dfrac{C_2-C(t)}{V}F_2(t)\\ F(t)=F_1(t)+F_2(t)\end{cases}$$

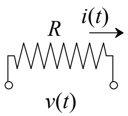
Fysikaalinen mallintaminen

- Tarkastellaan fysikaalista mallintamista koottujen parametrien malleilla sähköpiireissä, mekaanisissa järjestelmissä (sekä etenevä että pyörivä liike) ja virtausjärjestelmissä.
- Tässä tarkastelussa keskitytään yksinkertaisiin lineaarisiin peruskomponentteihin jättäen esimerkiksi lämpö- ja energiajärjestelmät tarkastelun ulkopuolelle.

Sähköpiirien peruskomponentit

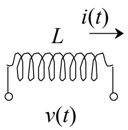
- Vastus (resistanssi)

$$v(t)=Ri(t)$$



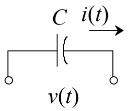
- Kela (induktanssi)

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$



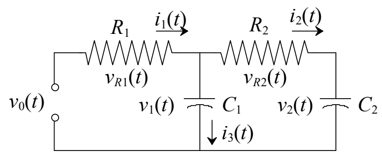
- Kondensaattori (kapasitanssi)

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$



Esimerkki 3. Sähköpiiri

- Tehdään malli sähköpiirille
  - Tulosuureena eli herätteenä on $v_0(t)$ ja lähtösuureina eli vasteina jännitteet kondensaattorien yli $v_1(t)$ ja $v_2(t)$.
  - Sähkövirroille ja vastuksille saadaan



$$C_1\frac{dv_1(t)}{dt}=i_3(t),\quad C_2\frac{dv_2(t)}{dt}=i_2(t) \qquad v_{R1}(t)=R_1i_1(t),\quad v_{R2}(t)=R_2i_2(t)$$

  - Kirchoffin ensimmäinen laki $i_1(t)=i_2(t)+i_3(t)$
  - Kirchoffin toinen laki

$$\begin{cases}v_0(t)=v_{R1}(t)+v_1(t)\\ v_1(t)=v_{R2}(t)+v_2(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_0(t)=R_1i_1(t)+v_1(t)\\ v_1(t)=R_2i_2(t)+v_2(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i_1(t)=\dfrac{v_0(t)-v_1(t)}{R_1}\\ i_2(t)=\dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2}\end{cases}$$

Esimerkki 3. Sähköpiiri

- Mallin herätteenä on jännite ja vasteina ovat jännitteet, joten kehitetyistä yhtälöistä on syytä eliminoida sähkövirrat tarpeettomina muuttujina.

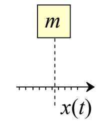
$$\begin{cases} \dfrac{dv_1(t)}{dt} = \dfrac{1}{C_1} i_3(t) = \dfrac{1}{C_1}\big(i_1(t) - i_2(t)\big) = \dfrac{v_0(t) - v_1(t)}{R_1 C_1} - \dfrac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2 C_1} \\ \dfrac{dv_2(t)}{dt} = \dfrac{1}{C_2} i_2(t) = \dfrac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2 C_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_1(t)}{dt} = -\left(\dfrac{1}{R_1 C_1} + \dfrac{1}{R_2 C_1}\right) v_1(t) + \left(\dfrac{1}{R_2 C_1}\right) v_2(t) + \left(\dfrac{1}{R_1 C_1}\right) v_0(t) \\ \dfrac{dv_2(t)}{dt} = \left(\dfrac{1}{R_2 C_2}\right) v_1(t) - \left(\dfrac{1}{R_2 C_2}\right) v_2(t) \end{cases}$$

Mekaanisten järjestelmien peruskomponentit

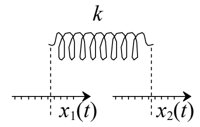
Etenevä liike:

- Massakappale (inertia)



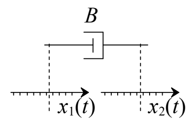
$$F_m(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

- Jousi



$$F_k(t) = k\Delta x(t) = k(x_1(t) - x_2(t))$$

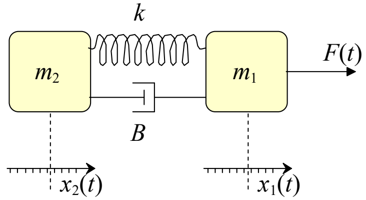
- Vaimennin



$$F_b(t) = B\frac{d\Delta x(t)}{dt} = B\left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right)$$

Esimerkki 4. Mekaaninen järjestelmä

- Tehdään malli mekaaniselle järjestelmälle, jossa kaksi massakappaletta on kytketty toisiinsa jousella ja vaimentimella
- Herätteenä on ulkoinen voima $F(t)$ ja vasteena jälkimmäisen massakappaleen paikka $x_2(t)$



- Ensimmäiselle massakappaleelle

$$m_1(t)\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + B\left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right) + k\big(x_1(t) - x_2(t)\big) = F(t)$$

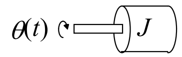
- Toiselle massakappaleelle

$$m_2(t)\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = B\left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right) + k\big(x_1(t) - x_2(t)\big)$$

Mekaanisten järjestelmien peruskomponentit

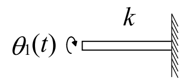
Pyörivä liike:

- Hitausmomentti



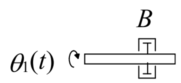
$$T_J(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

- Vääntöjousi



$$T_k(t) = k\theta_1(t)$$

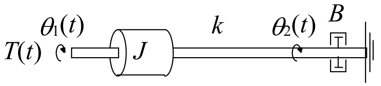
- Vääntövaimennin



$$T_b(t) = B\frac{d\theta_1(t)}{dt}$$

Esimerkki 5. Mekaaninen järjestelmä

- Tehdään malli kuvassa esitetylle pyörivälle järjestelmälle. Herätteenä on vääntömomentti $T(t)$ ja vasteena kulmat $\theta_1(t)$ ja $\theta_2(t)$

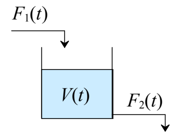


$$\begin{cases} J\dfrac{d^2\theta_1(t)}{dt^2}+k\big(\theta_1(t)-\theta_2(t)\big)=T(t) \\ B\dfrac{d\theta_2(t)}{dt}=k\big(\theta_1(t)-\theta_2(t)\big) \end{cases}$$

Virtausjärjestelmien peruskomponentit

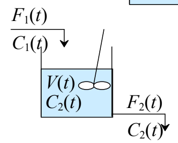
- Läpivirtaussäiliö

$$\frac{dV(t)}{dt}=F_1(t)-F_2(t)$$



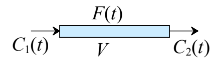
- Ideaalisekoitin

$$\frac{dV(t)C_2(t)}{dt}=F_1(t)C_1(t)-F_2(t)C_2(t)$$



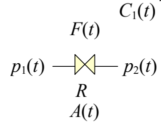
- Putkiviive

$$C_2(t)=C_1(t-T_d(t))=C_1\left(t-\frac{V}{F(t)}\right)$$



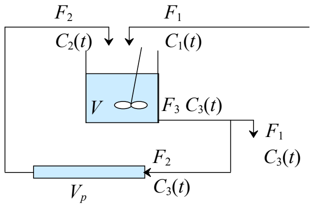
- Virtaus aukon läpi

$$F(t)=A(t)R\sqrt{\Delta p(t)}=A(t)R\sqrt{p_1(t)-p_2(t)}$$



Esimerkki 6. Virtausjärjestelmä

- Tehdään malli kuvassa esitetylle virtausjärjestelmälle. Herätteenä on tulovirran pitoisuus $C_1(t)$ ja vasteena poistovirran pitoisuus $C_3(t)$. Virtaukset ja tilavuudet ovat vakioita



- Virtauksen haaraantumispisteelle saadaan $F_3=F_1+F_2$
- Ideaalisekoittimelle ja putkelle saadaan

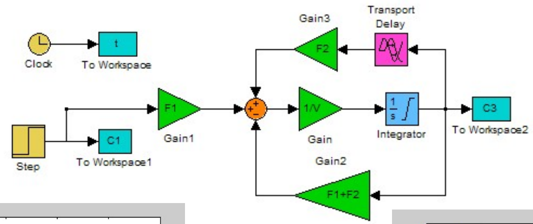
$$\frac{dVC_3(t)}{dt}=F_1C_1(t)+F_2C_2(t)-F_3C_3(t),\quad C_2(t)=C_3\left(t-\frac{V_p}{F_2}\right)$$

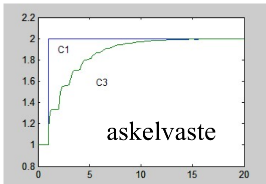
- Eliminoidaan yhtälöistä F_3 ja $C_2(t)$:

$$\frac{dC_3(t)}{dt}=\frac{1}{V}\left(F_1C_1(t)+F_2C_3\left(t-\frac{V_p}{F_2}\right)-(F_1+F_2)C_3(t)\right)$$

Esimerkki 6. Virtausjärjestelmän simulointi

- Tehdään simulointimalli virtausjärjestelmälle SIMULINK:illa



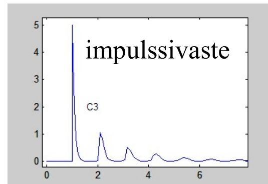


$V = 0.2$

$V_p = 2$

$F_1 = 1$

$F_2 = 2$



Tilaesitys

- Tilaesitys on kompakti tapa esittää korkean kertaluvun differentiaaliyhtälöitä/-yhtälöryhmiä.
- Systeemin hetkellinen tila on täydellinen kuvaus systeemistä. Jos alkutila (tilasuureet alkuhetkellä) ja kaikki tulosuureet alkuhetkestä lähtien tunnetaan, niin systeemin tila ja lähtösuureet voidaan määrittää mielivaltaisella ajanhetkellä. Tästä seuraa että tilaesitys sopii erittäin hyvin simulointiin.
- Systeemin tilasuureiden manipulointi ohjauksilla mahdollistaa paremman systeemin hallinnan verrattuna systeemin lähtösuureiden manipulointiin ohjausten avulla.
- Tilaesitys on standardimuotoinen esitys, joten systeemistä riippumatta voidaan standardoida myös hallintamekanismit (yhtälöt eivät riipu systeemin kertaluvusta ja parametreista)
- Tilaesitys soveltuu hyvin monimuuttujasysteemien mallintamiseen ja hallintaan

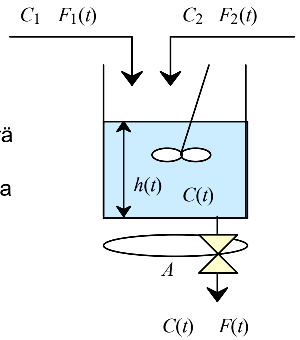
Tilaesitys

- Tilaesityksessä mielivaltaisen kertaluvun differentiaaliyhtälö/-yhtälöryhmä esitetään ryhmänä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä.
- Tilojen valinta voidaan tehdä äärettömän monella eri tavalla => tilaesitys ei ole yksikäsitteinen vaan monet erilaiset tilaesitykset voivat kuvata samaa input/output-mallia.
- Yleinen tilaesitys on muotoa $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$
- $\mathbf{x}(t)$ on tilasuure, $\mathbf{u}(t)$ ohjaussuure (tulosuure) ja $\mathbf{y}(t)$ lähtösuure - kaikki nämä suureet voivat olla vektoreita tai skalaareja.
- $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))$ on systeemiyhtälö (kuvaa systeemin dynamiikan) ja $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))$ on lähtökuvaus (kertoo miten lähtösuureet riippuvat tiloista ja ohjauksista)
- Jos $\mathbf{u}(t)$ on skalaari $u(t)$ ja $\mathbf{y}(t)$ skalaari $y(t)$, niin kyseessä on SISO-järjestelmä - huolimatta vektorin $\mathbf{x}(t)$ dimensiosta.

Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Virtausprosessissa sekoitetaan pakkasnestettä (laimeaa liuosta, jonka kemikaalipitoisuus on C_1 väkevään liuokseen, jonka pitoisuus on C_2).
- Tavoitteena on saada haluttu tuotantomäärä (virtaus F) annetut spesifikaatiot täyttävää tuotetta (pitoisuus C) käyttämällä ohjauksina virtauksia (F_1 ja F_2).
- Sekoitussäiliöstä on vapaa purkautuminen ilmanpaineeseen => poistovirtaus on verrannollinen pinnankorkeuden neliöjuureen:

$$F(t) = k\sqrt{h(t)}$$



Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Muodostetaan massatase (yksinkertaistuu tilavuustaseeksi) ja osa-ainetase pitoisuuksille

$$\begin{cases} \dfrac{dV(t)}{dt} = A\dfrac{dh(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - F(t) \\ \dfrac{dC(t)V(t)}{dt} = C_1F_1(t) + C_2F_2(t) - C(t)F(t) \end{cases}$$

$$\frac{dC(t)V(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt}V(t) + C(t)\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt}V(t) + C(t)\big(F_1(t) + F_2(t) - F(t)\big)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\dfrac{dh(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{h(t)} \\ \dfrac{dC(t)}{dt}Ah(t) = \big(C_1 - C(t)\big)F_1(t) + \big(C_2 - C(t)\big)F_2(t) \end{cases}$$

Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Saadaan yksinkertainen yhtälöryhmä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöistä

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dh(t)}{dt} = \dfrac{1}{A}\left(F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{h(t)}\right) \\ \dfrac{dC(t)}{dt} = \dfrac{1}{Ah(t)}\left((C_1 - C(t))F_1(t) + (C_2 - C(t))F_2(t)\right) \end{cases}$$

- Valitaan tiloiksi h ja C , ohjauksiksi F_1 ja F_2 sekä lähtösuureiksi F ja C

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t) \\ C(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ C(t) \end{bmatrix}$$

- Näillä muuttujavalinnoilla voidaan tilaesitys kirjoittaa suoraan standardimuodossa.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Saadaan systeemiyhtälö:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A}\left(u_1(t) + u_2(t) - k\sqrt{x_1(t)}\right) \\ \dfrac{1}{Ax_1(t)}\left((C_1 - x_2(t))u_1(t) + (C_2 - x_2(t))u_2(t)\right) \end{bmatrix}$$

- Lähtökuvausta varten tarkastellaan lähtömuuttujien riippuvuutta tilamuuttujista

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\sqrt{h(t)} \\ C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\sqrt{x_1(t)} \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- Lähtökuvaus:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ g_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\sqrt{x_1(t)} \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Esimerkki 7. Virtausjärjestelmän tilaesitys

- Virtausprosessin tilaesitykseksi saadaan

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A}\left(u_1(t) + u_2(t) - k\sqrt{x_1(t)}\right) \\ \dfrac{1}{Ax_1(t)}\left((C_1 - x_2(t))u_1(t) + (C_2 - x_2(t))u_2(t)\right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} k\sqrt{x_1(t)} \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Tässä esimerkissä tilojen valinta oli helppoa, koska sopivat tilamuuttujat saatiin suoraan systeemin mallista. Tarkastellaan muita menetelmiä tilojen valintaan lineaarisen tilaesityksen yhteydessä.

Lineaarinen tilaesitys

- Edellinen esimerkki (esimerkki 7) kuvasi epälineaarista tilaesitystä. Jos tarkasteltava systeemi on lineaarinen, niin sen muuttujat ja parametrit voidaan koota erillisiksi vektoreiksi ja matriisiksi, jolloin saadaan standardimuotoinen lineaarinen tilaesitys.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \end{cases}$$

- Parametrimatriisia $\mathbf{A}$ kutsutaan systeemimatriisiksi, $\mathbf{B}$:tä ohjausmatriisiksi, $\mathbf{C}$:tä lähtömatriisiksi ja $\mathbf{D}$:tä suoravaikutusmatriisiksi. Usein $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, jolloin koko suoravaikutustermi katoaa tilaesityksestä. (tämä tapahtuu vahvasti aidoilla – strictly proper – systeemeillä).

Lineaarinen tilaesitys

- Differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m \end{cases}$$

- Voidaan esittää matriisiyhtälönä

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

eli: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

Sähköpiirin tilaesitys

- Tarkastellaan esimerkin 3 sähköpiiriä ja kehitetään sille tilaesitys

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1(t)}{dt} = -\left(\dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_1}\right)v_1(t) + \left(\dfrac{1}{R_2C_1}\right)v_2(t) + \left(\dfrac{1}{R_1C_1}\right)v_0(t) \\ \dfrac{dv_2(t)}{dt} = \left(\dfrac{1}{R_2C_2}\right)v_1(t) - \left(\dfrac{1}{R_2C_2}\right)v_2(t) \end{cases}$$

- Luonnollinen valinta tilasuureille on kondensaattorien jännitteet (koska niistä on valmiit ensimmäisen kertaluokan differentiaaliyhtälöt). Valitaan nyt lähtösuureeksi pelkästään jälkimmäisen kondensaattorin jännite v_2.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = v_0(t), \quad y(t) = v_2(t)$$

- Näillä valinnoilla saadaan

Sähköpiirin tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_1}\right)x_1(t) + \dfrac{1}{R_2C_1}x_2(t) + \dfrac{1}{R_1C_1}u(t) \\ \dfrac{1}{R_2C_2}x_1(t) - \dfrac{1}{R_2C_2}x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = x_2(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

- ja edelleen

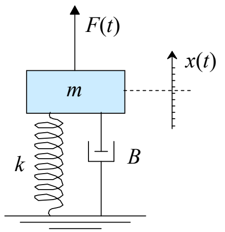
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{1}{R_1C_1} + \dfrac{1}{R_2C_1}\right) & \dfrac{1}{R_2C_1} \\ \dfrac{1}{R_2C_2} & -\dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + 0\,u(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Tilaesityksen muodostaminen

- Miten tilaesitys muodostetaan systemaattisesti?
  - Valitaan fysikaalisesti järkevät tilamuuttujat malliyhtälöistä (kuten aikaisemmissa esimerkeissä)
  - Derivointi-operaattorin p avulla
  - Kanonisten muotojen avulla
- Fysikaalisesti järkevät tilamuuttujat
  - Usein helpoin tapa
- Derivointi-operaattorin avulla
  - Voidaan muodostaa esim. ohjattava tai havaittava kanoninen muoto tai joissain tapauksissa myös diagonaalinen muoto
- Kanonisten muotojen avulla
  - Kaavaan sijoittaminen

Tilaesityksen muodostaminen

- Tarkastellaan mekaanista järjestelmää (esimerkki 2)



$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

- Fysikaalisesti järkevät tilamuuttujat
  - Valitaan paikka x ja nopeus $v = dx/dt$ $\quad \begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}(t) \end{cases}$

$$y(t) = x(t) = x_1(t), \quad u(t) = F(t)$$

  - Määritetään valittujen tilamuuttujien derivaatat

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = -\frac{B}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}F(t) = -\frac{B}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{B}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Tilaesityksen muodostaminen

- Toinen tapa: käytetään derivointioperaattoria p
  - Kirjoitetaan alkuperäinen yhtälö käyttäen derivointioperaattoria

$$\ddot{x}(t) + \frac{B}{m}\dot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}F(t) \quad \Rightarrow \quad \overbrace{p\{p\{\overbrace{x(t)}^{x_1(t)}\} + \frac{B}{m}x(t)\}}^{x_2(t)} = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}F(t)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = p\{x(t)\} + \frac{B}{m}x(t) = \dot{x}_1(t) + \frac{B}{m}x_1(t) \\ p\{x_2(t)\} = \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}F(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{B}{m}x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) = x(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Aalto-yliopisto

Tilaesityksen muodostaminen

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}y^{(1)}(t) + a_n y(t) = b_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1}u^{(1)}(t) + b_n u(t)$$

- Käytetään kanonisia muotoja
  - Yllä esitetylle yleiselle lineaariselle differentiaaliyhtälölle on johdettu oheiset kanoniset muodot

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

  - Ylempi tilaesitys: Ohjattava kanoninen muoto
  - Alempi tilaesitys: Havaittava kanoninen muoto

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Aalto-yliopisto

Tilaesityksen muodostaminen

- Käytetään kanonisia muotoja

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) + \tfrac{B}{m}\dot{x}(t) + \tfrac{k}{m}x(t) = \tfrac{1}{m}F(t)$$

- Todetaan, että derivointioperaattorilla saatiin havaittava kanoninen muoto ja fysikaalisesti valituilla tilasuureilla muodostettu tilaesitys muistuttaa erehdyttävästi ohjattavaa kanonista muotoa

$$\ddot{y}(t) + \tfrac{B}{m}\dot{y}(t) + \tfrac{k}{m}y(t) = 0\dot{u}(t) + \tfrac{1}{m}u(t) \quad \propto \quad \ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_1\dot{u}(t) + b_2 u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \propto \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Aalto-yliopisto

Lineaarisen tilaesityksen dimensio

- Systeemin kertaluku on minimirealisaatiossa systeemiä kuvaavien differentiaaliyhtälöiden kertalukujen summa. Tämä on myös systeemimatriisi $\mathbf{A}$:n dimensio.
- Ohjausten eli tulosuureiden lukumäärä on n_u
- Lähtösuureiden lukumäärä on n_y
- Systeemin kertaluku on n_S
- Tällöin lineaarisen tilaesityksen dimensiot ovat:

$$\begin{cases} \underbrace{\dot{\mathbf{x}}(t)}_{n_S\times 1} = \underbrace{\mathbf{A}}_{n_S\times n_S} \underbrace{\mathbf{x}(t)}_{n_S\times 1} + \underbrace{\mathbf{B}}_{n_S\times n_u} \underbrace{\mathbf{u}(t)}_{n_u\times 1} \\ \underbrace{\mathbf{y}(t)}_{n_y\times 1} = \underbrace{\mathbf{C}}_{n_y\times n_S} \underbrace{\mathbf{x}(t)}_{n_S\times 1} + \underbrace{\mathbf{D}}_{n_y\times n_u} \underbrace{\mathbf{u}(t)}_{n_u\times 1} \end{cases}$$

Linearisointi

- Linearisointi on menetelmä, jonka avulla kehitetään epälineaarisesta mallista lineaariapproksimaatio, joka pätee hyvin linearisointipisteen läheisyydessä (lineaariapproksimaatio on Taylorin sarjan nollas ja ensimmäinen termi tarkastelupisteessä)
- Tarkastellaan yleistä matriisiyhtälöä

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{z}) \\ f_2(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

- Approksimoidaan yhtälöä pisteessä $\mathbf{z}_0$

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \approx \mathbf{q}_0 + \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}^T}(\mathbf{z}_0)\cdot(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)$$

- Valitaan uudet muuttujat $\begin{cases} \Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}-\mathbf{q}_0 \\ \Delta\mathbf{z} = \mathbf{z}-\mathbf{z}_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \Delta\mathbf{q} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}^T}(\mathbf{z}_0)\cdot\Delta\mathbf{z}$$

Linearisointi

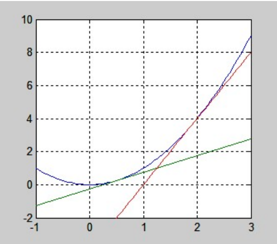
- Lineaariapproksimaatioksi saadaan siis

$$\Delta\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{bmatrix} \approx \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{z}^T}(\mathbf{z}_0)\cdot\Delta\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dz_1}(\mathbf{z}_0) & \frac{df_1}{dz_2}(\mathbf{z}_0) & \cdots & \frac{df_1}{dz_m}(\mathbf{z}_0) \\ \frac{df_2}{dz_1}(\mathbf{z}_0) & \frac{df_2}{dz_2}(\mathbf{z}_0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{df_n}{dz_1}(\mathbf{z}_0) & & & \frac{df_1}{dz_m}(\mathbf{z}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \vdots \\ \Delta z_m \end{bmatrix}$$

- Jos $\mathbf{q}$ on skalaari q, niin linearisointimatriisi supistuu vektoriksi ($n = 1$; yhtälön ylin rivi)
- Jos sekä $\mathbf{q}$ että $\mathbf{z}$ ovat skalaareja, niin linearisointi vastaa käyrän korvaamista tangentillaan linearisointipisteessä.

Linearisointi - esimerkki

- Tarkastellaan epälineaarista yhtälöä $q(z) = z^2$
- Lasketaan derivaatta $\frac{dq(z)}{dz} = 2z, \quad \frac{dq(z_0)}{dz} = 2z_0$
- Määritetään lineaariapproksimaatio $\Delta q(z) \approx \frac{dq(z_0)}{dz}\cdot\Delta z = 2z_0\cdot\Delta z$
- Toimintapiste: $q_0 = z_0^2$
- Katsotaan, miten lineaariapproksimaatio toimii tarkastelupisteissä $z_0 = 0.5$ ja $z_0 = 2$.



$$q(z) \approx q_0 + 2z_0(z-z_0)$$

$$q(z)\big|_{z_0=0.5} \approx 0.25 + (z-0.5)$$

$$q(z)\big|_{z_0=2} \approx 4 + 4(z-2)$$

Tilaesityksen linearisointi

- Kun epälineaarinen tilaesitys linearisoidaan, niin linearisointipisteeksi valitaan tavallisesti tasapainotila eli stationääritila (tila, jossa kaikki systeemin derivaatat saadaan nolliksi eli piste, jossa systeemi voi olla levossa – joka voi myös olla epästabiili piste). Stationääritila ei ole muuttuja vaan vakio ja yleensä sitä merkitään alaindeksillä S.
- Tilayhtälössä tavallisesti linearisoidaan systeemiyhtälö ja lähtökuvaus erikseen - nämä linearisoidaan tilojen ja ohjausten suhteen, jolloin saadaan suoraan lineaarisen tilaesityksen matriisit $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ ja $\mathbf{D}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \dfrac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)\cdot\Delta\mathbf{x}(t) + \dfrac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{u}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)\cdot\Delta\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\Delta\mathbf{u}(t) \\ \Delta\mathbf{y}(t) = \dfrac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{x}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)\cdot\Delta\mathbf{x}(t) + \dfrac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}^T}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)\cdot\Delta\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\Delta\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Epälineaarisen tilaesityksen linearisointi

- Linearisoidaan esimerkin 7 virtausjärjestelmän epälineaarinen tilaesitys ja esitetään kehitetty lineaariapproksimaatio yleisessä lineaarisen tilaesityksen standardimuodossa
  - Ratkaistaan tasapainotila (aikaderivaatat nollia)

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A}\left(u_{1,s} + u_{2,s} - k\sqrt{x_{1,s}}\right) \\ \dfrac{1}{Ax_{1,s}}\left(\left(C_1 - x_{2,s}\right)u_{1,s} + \left(C_2 - x_{2,s}\right)u_{2,s}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} k\sqrt{x_{1,s}} = u_{1,s} + u_{2,s} \\ \left(C_1 - x_{2,s}\right)u_{1,s} = -\left(C_2 - x_{2,s}\right)u_{2,s} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{1,s} = \left(\dfrac{u_{1,s} + u_{2,s}}{k}\right)^2 \\ x_{2,s} = \dfrac{C_1 u_{1,s} + C_2 u_{2,s}}{u_{1,s} + u_{2,s}} \end{cases}$$

Epälineaarisen tilaesityksen linearisointi

- Lasketaan alkuperäisestä systeemiyhtälöstä ja lähtökuvauksesta derivaatat kunkin muuttujan suhteen

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)}{d\mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{-k}{2A\sqrt{x_{1,s}}} & 0 \\ -\dfrac{\left(C_1 - x_{2,s}\right)u_{1,s} + \left(C_2 - x_{2,s}\right)u_{2,s}}{Ax_{1,s}^2} & -\dfrac{u_{1,s} + u_{2,s}}{Ax_{1,s}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

$$\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)}{d\mathbf{u}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A} & \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{C_1 - x_{2,s}}{Ax_{1,s}} & \dfrac{C_2 - x_{2,s}}{Ax_{1,s}} \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

Epälineaarisen tilaesityksen linearisointi

$$\frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)}{d\mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{k}{2\sqrt{x_{1,s}}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}, \quad \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)}{d\mathbf{u}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} = \mathbf{D}$$

- Sijoitetaan tasapainopisteen arvot matriiseihin ja saadaan lineaarinen approksimaatio, joka pätee pienille muutoksille tasapainopisteen ympärillä

$$\begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-k^2}{2A(u_{1,s} + u_{2,s})} & 0 \\ 0 & \dfrac{-k^2}{A(u_{1,s} + u_{2,s})} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A} & \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{k^2(C_1 - C_2)u_{2,s}}{A(u_{1,s} + u_{2,s})^3} & \dfrac{k^2(C_2 - C_1)u_{1,s}}{A(u_{1,s} + u_{2,s})^3} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}(t) \\ \Delta\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{k^2}{2(u_{1,s} + u_{2,s})} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}(t) \end{cases}$$