Tehtävä 1:

Aloitetaan korvaamalla derivaattojen merkinnät:

$$3\dot{x} + 9x + 12 = -3u(t) + 3\ddot{x}$$

Järjestetään yhtälö niin, että korkein derivaatta esiintyy yksinään yhtälön vasemmalla puolella, sekä niin että kaikki muuttujat ovat derivaattojen suhteen järjestyksessä

$$3\dot{x} + 9x + 12 + 3u(t) = 3\ddot{x}$$

$$3\ddot{x} = 3\dot{x} + 9x + 12 + 3u(t)$$

Lopuksi siistitään niin, että korkein derivaatta jää ilman kerrointa

$$\ddot{x} = \dot{x} + 3x + 4 + u(t)$$

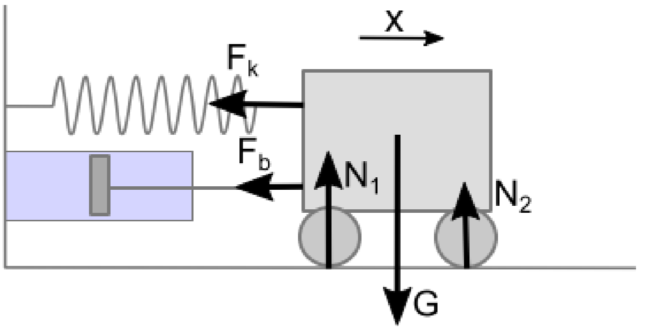
Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Tehtävä 2:

a)

Kelkka pääsee liikkumaan vain sivusuunnassa, joten painovoima ja tukivoima kumoavat toisensa. Myös vääntömomentit kumoavat toisensa, joten kelkka ei pääse kallistelemaan. Liikkeen tutkimisessa tarvitsee keskittyä siten vain sivuttaissuuntaiseen liikkeeseen, jonka suuruutta merkitään x:llä. Liikettä vastustaa kaksi voimaa: jousivoima ja vaimentimesta aiheutuva voima.

Kuvaan on hahmoteltu kappaleeseen vaikuttavat voimat, kun paikka ja nopeus ovat positiivisia:



b)

Jousivoima F_k on suoraan verrannollinen paikkaan x ja pyrkii palauttamaan kelkkaa kohti lepotilaa x = 0. Jousivakio on k.

$$F_k = -kx$$

Vaimentimesta aiheutuva voima Fb pyrkii vastustamaan kelkan liikettä ja on suoraan verrannollinen sen nopeuteen v. Vaimentimen vakio on b.

$$F_b = -bv$$

Sivuttaissuuntaiseksi liikeyhtälöksi saadaan täten (Newton II):

$$\sum F = ma \ \rightarrow \ F_k + F_b = ma \ \rightarrow \ -kx - bv = ma$$

Koska nopeus on paikan ensimmäinen derivaatta $v = \dot{x}$ ja kiihtyvyys toinen derivaatta $a = \ddot{x}$, saadaan järjestelmän dynamiikkaa kuvaavaksi differentiaaliyhtälöksi:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Myöhemmin tällä kurssilla tullaan käyttämään Laplace-muunnosta differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Differentiaaliyhtälöä ei tällä kertaa tarvitse ratkaista käsin.

Tehtävä 3:

a)

Säiliön veden tilavuuteen vaikuttaa pohjan pinta-ala ja veden korkeus $V = Ay$.

Pohjan pinta-ala ei muutu, joten tilavuuden muutos aiheutuu ainoastaan veden pinnankorkeuden muutoksesta $\dot{V} = A\dot{y}$.

Koska ulostulovirtaus oletetaan nollaksi, vaikuttaa veden määrään vain sisääntulovirtaus, joka lasketaan kaavalla $\dot{V} = v_0(k-y)$. Näin ollen voidaan merkitä tilavuudenmuutokset yhtä suuriksi.

$$A\dot{y} = v_0(k-y) \rightarrow A\dot{y} = v_0 k - v_0 y$$

Järjestellään yhtälö niin, että korkein derivaatta on ilman kertoimia yhtäsuuruusmerkin vasemmalla puolella ja niin että kaikki muuttujat ovat derivaattojen suhteen järjestyksessä.

$$\dot{y} = -\frac{v_0}{A}y + \frac{v_0 k}{A}$$

Vinkeistä tiedetään, että Yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle, joka on muotoa $\dot{y} + ay + b = 0$, on $y = -\frac{b}{a} + ce^{-at}$, missä c on jokin vakio. Saatetaan yhtälö siis tähän muotoon ja poimitaan arvot

$$\dot{y} + \frac{v_0}{A}y - \frac{v_0 k}{A} = 0 \rightarrow \quad a = \frac{v_0}{A} \; ja \; b = -\frac{v_0 k}{A}$$

Ratkaisu tälle systeemille on siis:

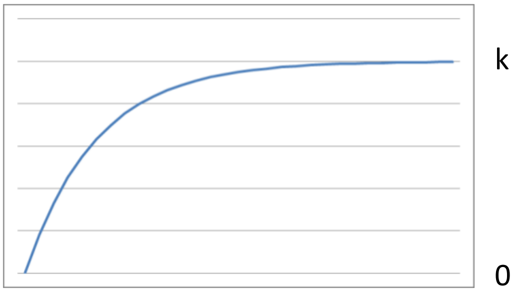
$$y(t) = -\frac{-\frac{v_0 k}{A}}{\frac{v_0}{A}} + ce^{-\frac{v_0}{A}t} = k + ce^{-\frac{v_0}{A}t}$$

b)

Vakio c saadaan ratkaistua kun pinnan korkeuden alkuarvo y(0) tiedetään. Sijoitetaan yhtälöön t=0

$$y(0) = k + ce^{-\frac{v_0}{A}0} = k + c \quad \rightarrow \quad c = y(0) - k$$

Tuloksesta voidaan päätellä, että pinnankorkeus lähestyy asymptoottisesti arvoa k



Palautettava tehtävä 1:

Vakionopeudensäädin on suljettu takaisinkytketty järjestelmä ja se voidaan kuvata alla olevalla lohkokaaviolla.