

ELEC-C1230 Sääätötekniikka

2. laskuharjoitus

Dynaamiset järjestelmät, differentiaaliyhtälöt, linearisointi, tilaesitys

1. Osoita, että alla olevat toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö ja tilaesitys kuvaavat samaa järjestelmää.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 2u(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

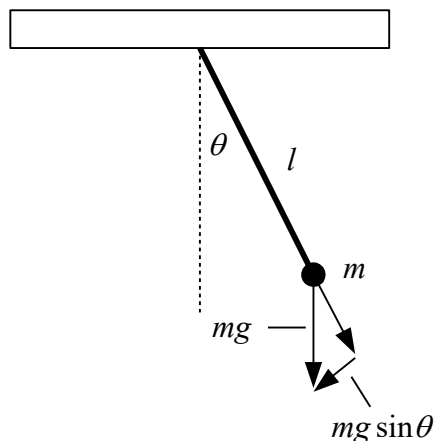
2. Muodosta seuraavasta differentiaaliyhtälöstä tilaesitys. Käytä p -tekniikkaa.

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{u}(t)$$

3. Tarkastellaan epälineaarista tilaesitystä

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1^2(t) \sin(u(t)) + 8x_2(t) \\ x_1(t)x_2(t) + \cos(u(t)) + 1 \end{bmatrix} \\ y(t) = \begin{bmatrix} -x_1^2(t) + x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- a. Ratkaise tasapainotilat, kun tiedetään, että ohjauksen $u(t)$ tasapainopisteissä $u_s \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
 - b. Linearisoi esitys tasapainotilaan
4. Kuvassa on esitetty heiluri, joka koostuu toisesta päästään kiinnitetystä langasta (pituus l) ja massakappaleesta (massa m). Heilahduskulmaa merkitään symbolilla θ ja g on maan vetovoiman aiheuttama kiihtyvyys.



Kirjoitetaan heilahdusliikkeen suunnassa liikeyhtälö

$$F = ma = ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

eli $l\ddot{\theta}(t) + g \sin \theta(t) = 0$

joka on kappaleen vapaata liikettä kuvaava (epälineaarinen) malli.

- a. Muodosta ohjaamatonta järjestelmää kuvaava tilamalli käyttämällä tilamuuttujina heilahduskulmaa ja sen derivaattaa.
- b. Linearisoi esitys tasapainopisteen ympäristössä tapahtuville pienille muutoksille. Tasapainotilassa heiluri on liikkumatta ala-asennossa.
- c. Tee linearisointi myös suoraan liikeyhtälöstä olettamalla heilahduskulma pieneksi ja käyttämällä approksimaatiota $\sin \theta \approx \theta$. Vertaa b-kohdan tulokseen.

5. * Muodosta kuvan sähköpiiriä vastaava differentiaaliesitys, kun ohjauksena on jännite $V_0(t)$ ja lähtösuurena jännite $V_2(t)$. Muodosta myös tilaesitys.

Ohje: Fysikaalisissa piireissä varastoituvaa energiaa kuvaavat suureet ovat yleensä luonnollisia tilamuuttujia. Esimerkkeinä sähköisissä piireissä ovat kondensaattorien jännitteet ja kelojen virrat.

