Hemtal 2

(1) Låt $f(x,y) = e^{x/y}$ för $y \neq 0$. Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$

Lösning: Vi använder kedjeregeln och får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot e^{x/y} = \frac{1}{y} e^{x/y} \quad \text{och}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot e^{x/y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^{-1})e^{x/y} = -\frac{x}{y^2}e^{x/y}$$

(2) Beräkna tangentplanets ekvation till

$$z = f(x,y) = xy\sqrt{x^2-y^2}$$

i punkten $(1, 0, f(1,0))$.

Lösning: Vi vet att tangentplanet har ekvationen

$$z = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0)$$

Vi skriver $f(x,y) = xy\left(x^2-y^2\right)^{1/2}$

Detta ger $f_x(x,y) = y(x^2-y^2)^{1/2} + xy \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2x\,(x^2-y^2)^{-1/2}$
$= y\sqrt{x^2-y^2} + x^2y\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$

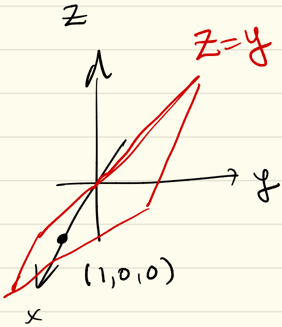
och

$$f_y(x,y) = x\sqrt{x^2-y^2} + (-2y)\frac{xy}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} = x\sqrt{x^2-y^2} - xy^2\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

Vi beräknar $f(1,0) = 1 \cdot 0\sqrt{1^2-0^2} = 0$,

$$f_x(1,0) = 0 \text{ och } f_y(1,0) = 1\sqrt{1^2-0^2} - 0 = 1.$$

Vi får $z = 0 + 0(x-1) + 1(y-0)$.
Tangentplanet har ekvationen



$$z = y \qquad (x \text{ fri variabel})$$

③ Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion. Beräkna tangentplanet för $z = y\,f(x/y)$ i punkten på ytan där $(x,y) = (a,b)$ då $b>0$.

Lösning: Vi har $z = g(x,y) = y\,f(x/y)$. Vi beräknar

$$g_x(x,y) = y\,f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = f'(x/y)$$

$$g_y(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right) + y \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) f'(x/y) =$$

$$= f(x/y) - \frac{x}{y}f'(x/y)$$

Detta leder till

$$z = g(a,b) + g_x(a,b)(x-a) + g_y(a,b)(y-b)$$

$$= b f\left(\frac{a}{b}\right) + f'\left(\frac{a}{b}\right)(x-a) + \left(f\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b} f'\left(\frac{a}{b}\right)\right)(y-b)$$

$$= b f\left(\frac{a}{b}\right) + f'\left(\frac{a}{b}\right)x - a f'\left(\frac{a}{b}\right) + \left(f\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b} f'\left(\frac{a}{b}\right)\right)y$$
$$- b\left(f\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b} f'\left(\frac{a}{b}\right)\right) =$$

$$= f'\left(\frac{a}{b}\right)x + \left(f\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b} f'\left(\frac{a}{b}\right)\right)y$$

$$\Longrightarrow \quad z = f'\left(\frac{a}{b}\right)x + \left(f\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{b} f'\left(\frac{a}{b}\right)\right)y$$

(Notera att origo är en punkt på alla dessa plan. Ingår inte i uppgiften men i alla fall)

Inlämningsuppgift 2

(1) Definiera
$$f(x,y) = \int_0^{x^2 y} t - e^{-t^2}\, dt.$$

Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Lösning: Låt $F(T) = \int_0^T t - e^{-t^2}\, dt$. Vi vet att $F'(T) = T - e^{-T^2}$. Dessutom så ser vi att

$$f(x,y) = F(x^2 y).$$ Därför

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyF'(x^2 y) = 2xy(x^2 y - e^{-x^4 y^2})$$

och $$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 F'(x^2 y) = x^2 (x^2 y - e^{-x^4 y^2})$$

(2) Låt $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en deriverbar funktion. Visa att
$$f(x,y) = y\,\varphi(x^2 - y^2)$$
löser den partiella differentialekvationen
$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y^2} f(x,y)$$

då $x > 0$ och $y > 0$.

Lösning: Vi beräknar $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,\varphi'(x^2-y^2)\cdot 2x = 2xy\,\varphi'(x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi(x^2-y^2) + y(-2y)\varphi'(x^2-y^2) =$$

$$= \varphi(x^2-y^2) - 2y^2\varphi'(x^2-y^2)$$

Vi ser att $\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy\,\varphi'(x^2-y^2)}{x} +$

$$+ \frac{1}{y}\varphi(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{y}\varphi'(x^2-y^2) =$$

$$= \frac{1}{y}\varphi(x^2-y^2) = \frac{1}{y^2}\,y\,\varphi(x^2-y^2) = \frac{1}{y^2}f(x,y)$$

$\otimes$

(3) En funktion $f(x,y)$ som uppfyller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{kallas harmonisk.}$$

Visa att $u_k(x,y) = e^{kx}\cos(ky)$ och $v_k(x,y) = e^{kx}\sin(ky)$ är harmonisk då $k \in \mathbb{Z}$.

Skriv ner en harmonisk funktion som uppfyller $f(0,y) = 3\cos(2y) + 4\sin(4y)$.

Lösning: $\frac{\partial u_k}{\partial x} = ke^{kx}\cos(ky)$ $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = k^2e^{kx}\cos(ky)$

$\frac{\partial u_k}{\partial y} = -ke^{kx}\sin(ky)$ $\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = -k^2e^{kx}\cos(ky)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} = k^2e^{kx}\cos(ky) - k^2e^{kx}\cos(ky) = 0$$

$\frac{\partial v_k}{\partial x} = ke^{kx}\sin(ky)$ $\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} = k^2e^{kx}\sin(ky)$

$\frac{\partial v_k}{\partial y} = ke^{kx}\cos(ky)$ $\frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} = -k^2e^{kx}\sin(ky)$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} = k^2e^{kx}\sin(ky) - k^2e^{kx}\sin(ky) = 0$$

Vi ser att $w(x,y) = \alpha u_k(x,y) + \beta v_m(x,y)$ också $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $k, m \in \mathbb{Z}$

Dessutom

$$w(0,y) = \alpha u_k(0,y) + \beta v_m(0,y) =$$
$$= \alpha\cos(ky) + \beta\sin(my)$$

Om vi väljer $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $k = 2$ och $m = 4$ så får vi en harmonisk funktion som uppfyller $f(0,y) = 3\cos(2y) + 4\sin(4y)$

Alltså $f(x,y) = 3e^{2x}\cos(2y) + 4e^{4x}\sin(4y)$ är en harmonisk funktion som uppfyller $f(0,y) = 3\cos(2y) + 4\sin(4y)$.

Demouppgifter 2

① Låt $f(x,y) = x^{-1}y^2$. Ange ekvationen för tangentplanet och normallinjen till grafen $z=f(x,y)$ i punkten $(2,1, f(2,1))$

Lösning: Vi vet att $z = f(2,1) + f_x(2,1)(x-2) + f_y(2,1)(y-1)$ är ekvationen för tangentplanet.

$$f(2,1) = 2^{-1}1^2 = 1/2$$

$$f_x = -x^{-2}y^2 \qquad f_y = 2x^{-1}y$$

$$f_x(2,1) = -2^{-2}1^2 = -\frac{1}{4} \qquad f_y(2,1) = 2\frac{1}{2} = 1$$

Därför är $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + (y-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + y - 1 = y - \frac{1}{4}x$

tangentplanet till $z=f(x,y)$ i punkten $(2,1, f(2,1)) = (2,1,1/2)$

Vi vet också att en normalvektor till planet är $\vec{n} = (1,0,f_x) \times (0,1,f_y) = (-f_x, -f_y, 1)$

Därför har normallinjen formen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ f(2,1) \end{pmatrix} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 + t/4 \\ 1 - t \\ \frac{1}{2} + t \end{pmatrix}$$

(2) Låt $f(x,y)$ ha kontinuerliga derivator av första och andra ordning. Låt $z = f(x,y)$, $x = 2s + 3t$ och $y = 3s - 2t$. Beräkna

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}.$$

Lösning: Kedjeregeln ger att $F(x(s,t), y(s,t))$ (där $x(s,t) = 2s+3t$ och $y(s,t) = 3s - 2t$) har

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 2\frac{\partial F}{\partial x} + 3\frac{\partial F}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = 3\frac{\partial F}{\partial x} - 2\frac{\partial F}{\partial y}$$

oavsett vilken (differentierbar) funktion F vi har.

Därför

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) = 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 3\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= 2\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) + 3\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) =$$

$$= 4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + 9\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Vi får också

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y}$$

och

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = 3\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= 3\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) - 2\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(Vi använder $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i dessa beräkningar)

3 Låt $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Visa också att f inte är kontinuerlig i origo.

Lösning: Vi beräknar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$$

(inte $\lim_{(a,b) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$!)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

På samma sätt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Funktionen är inte kontinuerlig i origo eftersom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} \text{ inte existerar.}$$

Varför? Jo, på x-axeln får vi

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

men då $y=x$ får vi

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2} = 1$$

$\otimes$