Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Vättö
Harjoitukset, Viikko 3B, 2024

Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Mahdolliset vastaukset on siirretty loppuun.

Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Evaluoi funktion $f(x,y) = xy + x^2$ molemmat osittaisderivaatat pisteessä $(2,0)$.

TEHTÄVÄ M2 Etsi funktion $f(x,y) = y^2 + x^2$ kaikki toiset osittaisderivaatat.

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Määritä se pinnan $\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\mathbf{i}+(u^2+v^2)\mathbf{j}+(u^3+v^3)\mathbf{k}$ piste, jossa tangenttitaso on tason $9x + 3y - z = 0$ suuntainen. Mikä on tangenttitason yhtälö?

TEHTÄVÄ J2 Määritä pinnan $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + v\cos u\,\mathbf{j} + \cos u\cos v\,\mathbf{k}$ pisteeseen $(0,0,1)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.

Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Määritä pisteen a) $(2,3,6)$, b) $(3,3,1)$ kautta kulkeva pinnan $z = xy$ normaali.

TEHTÄVÄ K2 Etsi pisteen $(0,0,1)$ pienin etäisyys elliptisestä paraboloidista $z = x^2 + 2y^2$.

Haaste

Kertausta differentiaaliyhtälöistä: Laplace-yhtälön $\Delta u = 0$ radiaalinen eli säteittäinen muoto n-ulotteisessa avaruudessa on

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0.$$

(Tulkinta: $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,) = f(r)$, kun $n = 3$ jne. Tähän palataan myöhemmin.)
Määritä kaikki radiaaliset ratkaisut $f(r)$, kun
a) $n = 3$;
b) $n = 2$.
Vihjeitä: a-kohta: Kerro puolittain lausekkeella r^2, jolloin saadaan Euler-tyyppinen DY: siihen yrite $f(r) = r^{\lambda}$.
b-kohta (kertaluvun pudotus): Merkitse $v(r) = f'(r)$, jolloin $v'(r) = f''(r)$ ja saadaan separoituva (ja myös lineaarinen) 1. kertaluvun DY funktiolle $v(r)$. Lopuksi $f(r)$ integroimalla $v(r)$.

Vastauksia

TEHTÄVÄ J1
Ratkaisu: $(2, 10, 26)$, $9x + 3y - z = 22$.
TEHTÄVÄ J2
Ratkaisu: $z = 1$.
TEHTÄVÄ K1
Ratkaisu: $\mathbf{r} = \sqrt[3]{3}\mathbf{i} + \sqrt[3]{3}\mathbf{j} + \sqrt[3]{9}\mathbf{k} + t(\sqrt[3]{3}\mathbf{i} + \sqrt[3]{3}\mathbf{j} - \mathbf{k})$
$\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$,
$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$,
b) kolme ratkaisua;
a) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$, lisäksi kaksi muuta,
TEHTÄVÄ K2
Ratkaisu: $\sqrt{17}/2$.