ELEC-C1230 Säätötekniikka

Luku 3: Dynaamisen vasteen määrittäminen, Laplace-muunnos, siirtofunktio

Luku 3: Lukuohje

- Laplace-muunnos ja käänteismuunnos
- Impulssifunktio, askelfunktio, pengerfunktio (ramppifunktio). Impulssivaste, askelvaste, pengervaste
- Siirtofunktio, painofunktio
- Loppuarvoteoreema ja staattinen vahvistus
- Differentiaaliyhtälöstä siirtofunktioon ja päinvastoin
- Tilaesityksestä siirtofunktioon
- Toteutukset ja laskut Matlabilla

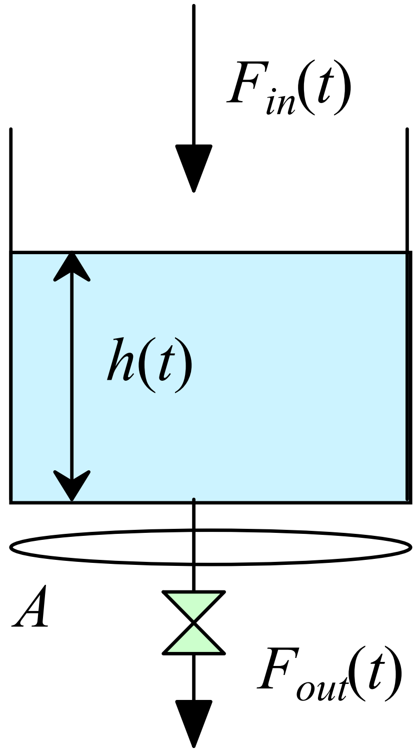
Differentiaaliyhtälön ratkaisu

- Systeemin ymmärtämisen ja hallinnan kannalta on olennaista tietää, miten lähtösuure $y(t)$ käyttäytyy ajan funktiona eri tilanteissa ja eri ohjauksilla $u(t)$.
- Koska mallit ovat differentiaaliyhtälöitä, niin lähtösuureen käyttäytymisen selvittäminen pelkistyy differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen annetuilla herätteillä ja alkuarvoilla.
- Epälineaariselle tai jakautuneiden parametrien differentiaaliyhtälöryhmälle ei aina löydy analyyttistä ratkaisua
- Lineaariselle, koottujen parametrien, tarkasti määritetylle differentiaaliyhtälöryhmälle voidaan aina määrittää analyyttinen ratkaisu

Esimerkki: läpivirtaussäiliö

Tarkastellaan läpivirtaussäiliötä, josta on vapaa purkautuminen ilmanpaineeseen. Herätteenä on tulovirtaus $F_{in}(t)$ ja vasteena pinnankorkeus $h(t)$. Poistovirtaus $F_{out}(t)$ on suoraan verrannollinen pinnankorkeuden neliöjuureen.

$$F_{out}(t) = k\sqrt{h(t)}$$



Pohjan pinta-ala $A = 1\ \mathrm{m}^2$ ja purkauskerroin $k = 2\ \mathrm{m}^{5/2}/\mathrm{h}$. Alkuhetkellä pinnankorkeus $h(0) = 1\ \mathrm{m}$

Määritetään kauanko säiliön tyhjentyminen kestää, kun tulovirtaus katkaistaan; eli $F_{in}(t) = 0\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$, kun $t \geq 0$.

Esimerkki: läpivirtaussäiliö

Prosessille saadaan massataseesta malli:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A\frac{dh(t)}{dt} = F_{in}(t) - F_{out}(t) = F_{in}(t) - k\sqrt{h(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh(t)}{dt} = -2\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{h}^{-1} \cdot \sqrt{h(t)}$$

Ratkaistaan pinnankorkeuden aikariippuvuus integroinnilla

$$\frac{dh(t)}{\sqrt{h(t)}} = -2\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{h}^{-1}dt \quad \Rightarrow \quad \int_{h(0)}^{h(t)} \frac{1}{\sqrt{h(t)}}dh(t) = -2\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{h}^{-1}\int_0^t dt$$

$$\Big/_{h(0)}^{h(t)} 2\sqrt{h(t)} = -2\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{h}^{-1} \Big/_0^t t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{h(t)} - \sqrt{h(0)} = -t\ \mathrm{m}^{1/2}\mathrm{h}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = \left(\sqrt{h(0)/\mathrm{m}} - t/\mathrm{h}\right)^2 \mathrm{m}$$

Esimerkki: läpivirtaussäiliö

Kun tähän sijoitetaan alkuarvo $h(0) = 1\ \mathrm{m}$ ja lopputilan arvo $h(t_F) = 0\ \mathrm{m}$, niin säiliön tyhjenemisen ajanhetkeksi t_F saadaan

$$h(t_F) = 0\mathrm{m} = \left(1 - t_F / \mathrm{h}\right)^2 \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad t_F = 1\mathrm{h}$$

Eli säiliö tyhjenee tunnissa

Lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisu

Edellisessä esimerkissä pinnankorkeuden aikariippuvuus (vaste tulovirtauksen katkaisemiselle) ratkaistiin systeemin epälineaarisesta mallista suoralla integroinnilla.

Lineaarinen differentiaaliyhtälö/-yhtälöryhmä voidaan ratkaista mekaanisesti Laplace-muunnoksen avulla

- Laplace-muunnetaan systeemiä kuvaavat differentiaaliyhtälöt ja systeemin tulosuureet
- Ratkaistaan saadusta algebrallisesta yhtälöstä lähtösuure
- Laplace-käänteismuunnetaan lähtösuureen lauseke

Säätötekniikan sovelluksissa kaikki ajan funktiot ovat nollia ennen alkuhetkeä:

$$f(t) \equiv 0, \quad \text{kun } t < 0$$

Esimerkki

Aikatason ongelma

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + 2y(t) = e^{-t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aikatason ratkaisu

$$y(t) = e^{-t}$$

Laplace-tason ongelma

$$\begin{cases} \{sY(s) - y(0)\} + \{2Y(s)\} = \left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Laplace-tason ratkaisu

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

Laplace-muunnos

- Määritelmä: ($f(t)$ on ajan funktio ja $F(s)$ on sitä vastaava Laplace-tason esitys)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{b-j\infty}^{b+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

- Jos raja-arvot ovat olemassa, niin niille pätee
  - Loppuarvoteoreema $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$
  - Alkuarvoteoreema $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
- Laplace-taulukot on esitetty eri lähteissä hieman erilaisina (yleensä joko niin, että ajan funktiot on helppo Laplace-muuntaa tai niin, että Laplace-tason esitys voidaan käänteismuuntaa helposti.

Laplace-teoreemoja

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
$F(s)$	$f(t)$	T1
$C_1F_1(s)+C_2F_2(s)$	$C_1f_1(t)+C_2f_2(t)$	T2
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	T3
$e^{-as}F(s)$	$\begin{cases} 0, & t \le a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$	T4
$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	T5
$-\frac{d}{ds}F(s)$	$f(t)t$	T6

Laplace-teoreemoja

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$	$f(t)\frac{1}{t}$	T7
$F_1(s)F_2(s)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	T8
$sF(s)-f(0)$	$\dot{f}(t)$	T9
$s^2F(s)-\left(sf(0)+\dot{f}(0)\right)$	$\ddot{f}(t)$	T10
$s^nF(s)-\left(s^{n-1}f(0)+s^{n-2}\dot{f}(0)\cdots+f^{(n-1)}(0)\right)$	$f^{(n)}(t)$	T11
$\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\Big\vert_{t=+0}$	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	T12

Laplace-muunnospareja

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
1	$\delta(t)$	M1
$\dfrac{1}{s}$	1	M2
$\dfrac{1}{s^2}$	t	M3
$\dfrac{1}{s^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!}$	M4
$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	M5
$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	M6
$\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\dfrac{t^n e^{-at}}{n!}$	M7
$\dfrac{1}{s(s+a)}$	$\dfrac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	M8

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)$	M9
$\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{ab(b-a)}\left(ae^{-bt}-be^{-at}\right)$	M10
$\dfrac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$	M11
$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	M12
$\dfrac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\sin(at)$	M13
$\dfrac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\cos(at)$	M14
$\dfrac{s+a}{s+b}$	$\delta(t)+(a-b)e^{-bt}$	M15

TABLE 3.1 AN INITIAL LIST OF TRANSFORM PAIRS

		$f(t)$	$F(s)$
1	Impulssi	$\delta(t)$ Diracin delta	1
2	Askel	$u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
3		$e^{-at}u_s(t)$	$\frac{1}{s+a}$
4	Penger	$tu_s(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5		$t^n u_s(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6		$(\sin \omega t)u_s(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7		$(\cos \omega t)u_s(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

TABLE 3.2 ADDITIONAL TRANSFORM PAIRS

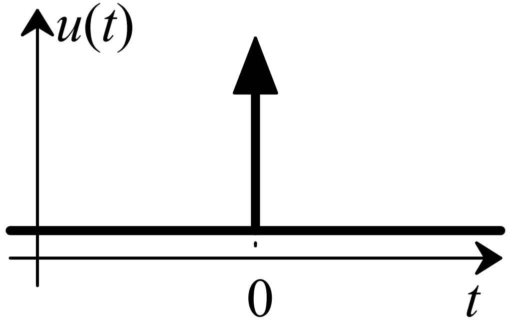
	$f(t)$	$F(s)$
8	$te^{-at}u_s(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$
9	$(e^{-at}\sin \omega t)u_s(t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
10	$(e^{-at}\cos \omega t)u_s(t)$	$\dfrac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
11	$[(B-Aa)te^{-at}+Ae^{-at}]u_s(t)$	$\dfrac{As+B}{(s+a)^2}$
12	$e^{-at}\left[A\cos \omega t+\dfrac{(B-Aa)}{\omega}\sin \omega t\right]u_s(t)$	$\dfrac{(As+B)}{(s+a)^2+\omega^2}$

Deterministiset testifunktiot

- Systeemin herätteenä $u(t)$ käytetään usein seuraavia signaaleja
  - Yksikköimpulssifunktio (Diracin deltafunktio)

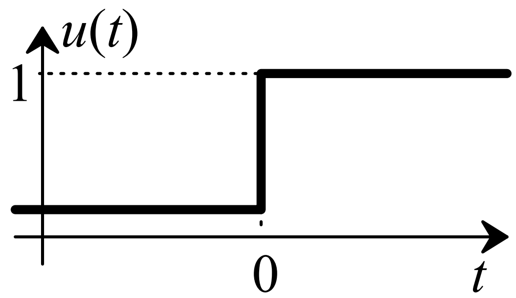
$$u_\delta(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty; & t = 0_+ \\ 0; & \text{muulloin} \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$U_\delta(s) = \Delta(s) = 1$$



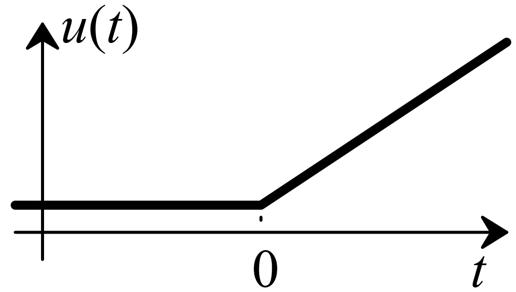
  - Yksikköaskelfunktio

$$u_s(t) = \begin{cases} 0; & t \le 0 \\ 1; & t > 0 \end{cases} \qquad U_s(s) = \frac{1}{s}$$



  - Yksikköpengerfunktio

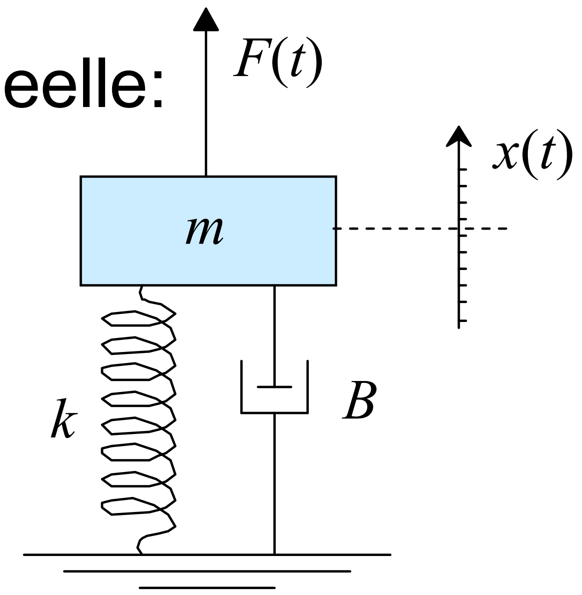
$$u_r(t) = \begin{cases} 0; & t \le 0 \\ t; & t > 0 \end{cases} \qquad U_r(s) = \frac{1}{s^2}$$



Esimerkki: Massakappale

Edellisellä luennolla johdettiin massakappaleelle:

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$



Ratkaistaan vaste, kun

$$\begin{cases} k = 5 \\ B = 2 \\ m = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = -1 \\ F(t) = 2\delta(t) \quad \text{(impulssi)} \end{array}$$

Massakappaleen malli aikatasossa $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 2\delta(t)$

ja Laplace-muunnettuna:

$$(s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + 2\cdot(sX(s) - x(0)) + 5\cdot X(s) = 2\cdot 1$$

$$\left(s^2 X(s) - s + 1\right) + 2\left(sX(s) - 1\right) + 5X(s) = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(s^2 + 2s + 5\right)X(s) = s + 3$$

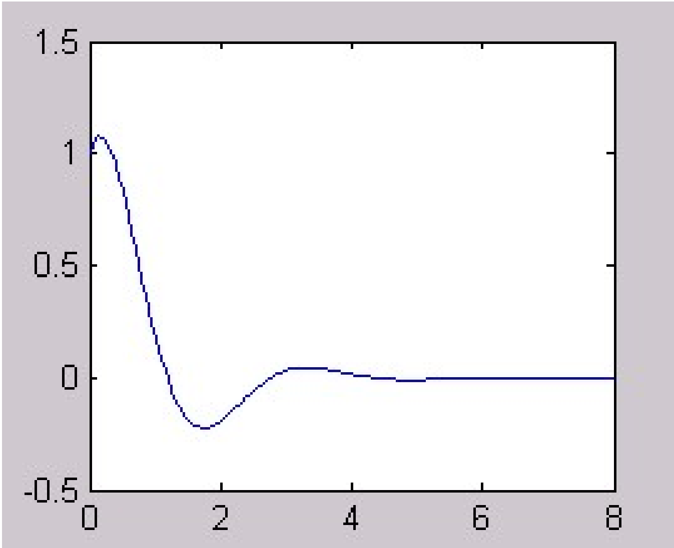
Esimerkki: Massakappale

Ratkaistaan lausekkeesta massakappaleen paikka $X(s)$:

$$X(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5} = \frac{s+1+2}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

Käänteismuunnetaan takaisin aikatasoon

$$x(t) = L\{X(s)\} = e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t) = e^{-t}\left(\sin(2t)+\cos(2t)\right)$$



Nollatila- ja nollaohjausvasteet

- Vasteesta voidaan erottaa alkuarvoista johtuva vaste $y_0(t)$ (nollaohjausvaste) ja ulkoisesta ohjauksesta johtuva vaste $y_u(t)$ (nollatilavaste). Lineaarisella järjestelmällä kokonaisvaste on näiden kahden vasteen summa.

$$y(t) = y_u(t) + y_0(t)$$

- Nollaohjausvaste $y_0(t)$ on vaste silloin, kun ulkoiset ohjaukset eivät vaikuta systeemiin $u_i(t) = 0$.
- Nollatilavaste $y_u(t)$ on vaste silloin, kun kaikki systeemin alkuarvot $y^{(n)}(0)$ ja $u_i^{(n)}(0)$ ovat nollia.
- Usein termillä ”vaste” tarkoitetaan nollatilavastetta eli vastetta johonkin ulkoiseen herätteeseen – huomioimatta alkuarvoja.

Esimerkki 2: Massakappale

- Määritetään edellisestä esimerkistä nollatila- ja nollaohjausvasteet

$$(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + 2\cdot(sX(s) - x(0)) + 5\cdot X(s) = 2\cdot\Delta(s)$$

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) = (sx(0) + \dot{x}(0) + 2x(0)) + 2\Delta(s)$$

$$X(s) = \frac{(sx(0) + \dot{x}(0) + 2x(0))}{s^2 + 2s + 5} + \frac{2\Delta(s)}{s^2 + 2s + 5} = X_0(s) + X_u(s)$$

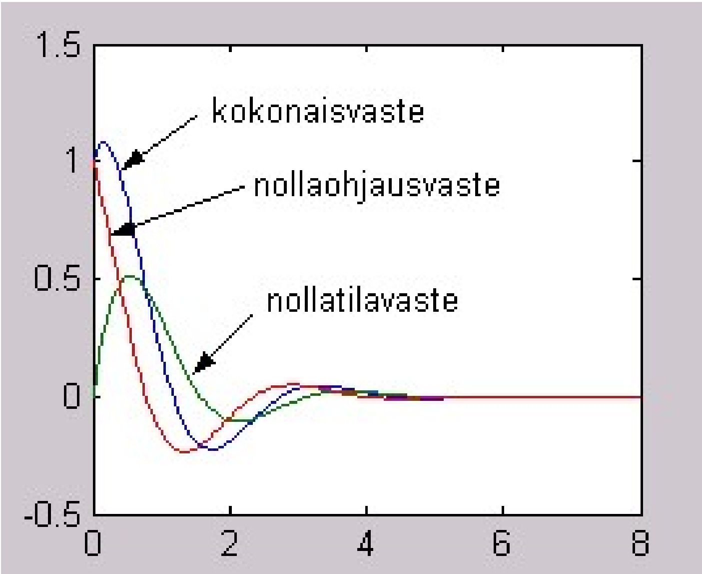
$$X(s) = X_0(s) + X_u(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$x(t) = L\{X(s)\} = L\{X_0(s) + X_u(s)\} = e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t) = x_0(t) + x_u(t)$$

Esimerkki 2: Massakappale

- Nollaohjausvaste lähtee alkutilasta systeemin alkuarvojen johdosta (massakappaleen sijainti alkuhetkellä on 1 ja sen alkunopeus -1)
- Nollatilavaste lähtee levosta ulkoisen ohjauksen eli voiman johdosta (impulssimainen nykäisy alkuhetkellä)

$$\begin{cases} x_0(t) = e^{-t}\cos(2t) \\ x_u(t) = e^{-t}\sin(2t) \\ x(t) = e^{-t}\left(\cos(2t) + \sin(2t)\right) \end{cases}$$



Siirtofunktio

- Säätötekniikassa tutkitaan tavallisesti, miten ulkoiset ohjaukset ja häiriöt vaikuttavat vasteeseen; alkuarvojen vaikutus jätetään tällöin huomioimatta ja keskitytään nollatilavasteeseen.
- Kun alkuarvoja ei ole, niin vasteen lauseke saa muodon, jossa lähtösuure $Y(s)$ on tulo mallin Laplace-tason esityksestä $G(s)$ ja tulosuureen Laplace-muunnoksesta $U(s)$.
- Mallin Laplace-tason esitys $G(s)$ on nimeltään siirtofunktio.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau^*)u(\tau^*)d\tau^* = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Siirtofunktion määrittäminen

- Laplace-muunnetaan systeemiä kuvaavat differentiaaliyhtälöt olettaen kaikki alkuarvot nolliksi (tällöin derivointia vastaa Laplace-tasossa s:llä kertominen)
- Siirtofunktio $G(s)$ on lähtösuureen $Y(s)$ ja tulosuureen $U(s)$ osamäärä.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- Mikäli tulo- ja lähtösuureita on useita (MIMO-malli), niin yksittäisen tulosuureen vaikutus yksittäiseen lähtösuureeseen voidaan määrittää olettamalla muut suureet nolliksi. Kun tämä toistetaan jokaiselle tulo- ja lähtösuureelle, niin saadaan siirtofunktiomatriisi, joka noudattaa matriisiyhtälöä

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{U}(s)$$

Siirtofunktion määrittäminen

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_{n_y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1n_u}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2n_u}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n_y1}(s) & G_{n_y2}(s) & \cdots & G_{n_yn_u}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_{n_u}(s) \end{bmatrix}$$

Painofunktio $g(t)$ on Laplace-käänteismuunnos siirtofunktiosta ja samalla myös systeemin yksikköimpulssivaste. Joissain tapauksissa siirtofunktio voidaan määrittää kokeellisesti syöttämällä systeemiin impulssimainen heräte, mittaamalla vaste ja Laplace-muuntamalla vasteeseen sovitettu matemaattinen lauseke.

$$\begin{cases} g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \\ G(s) = L\{g(t)\} \end{cases}$$

Differentiaaliyhtälöstä siirtofunktioon

Differentiaaliyhtälöstä voidaan päästä siirtofunktioon myös oikotietä. Yleinen lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y^{(1)}(t) + a_n y(t) = b_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} u^{(1)}(t) + b_n u(t)$$

on Laplace-muunnettuna (ja olettaen alkuarvot nolliksi)

$$\left(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n\right) Y(s) = \left(b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n\right) U(s)$$

Tästä on helppo muodostaa siirtofunktio

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Vastaavasti päästään siirtofunktiosta takaisin differentiaaliyhtälöihin

Esimerkki: Massakappale

Määritetään edellisen esimerkin siirtofunktio ja painofunktio

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = F(t) \qquad \begin{cases} y(t) = x(t) \\ u(t) = F(t) \end{cases}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad s^2Y(s) + 2sY(s) + 5Y(s) = U(s)$$

$$\left(s^2 + 2s + 5\right)Y(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

Painofunktio on nyt sama kuin yksikköimpulssivaste

Vasteen määrittäminen

Kun siirtofunktio tunnetaan, niin vaste (nollatilavaste) lasketaan seuraavasti

- Laplace-muunnetaan ulkoinen ohjaus $u(t)$ $$U(s) = L\{u(t)\}$$
- Ratkaistaan lähtösuure $Y(s)$ $$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$
- Käänteismuunnetaan lähtösuure aikatasoon $$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

Eli:

$$y(t) = L^{-1}\{G(s) \cdot L\{u(t)\}\}$$

Esimerkki: Massakappale

Määritetään massakappaleelle yksikköaskel- ja -pengervasteet. Aikaisemmin systeemille määritettiin siirtofunktio

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

Yksikköaskeleelle $U(s) = \frac{1}{s}$

Vasteelle:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Tehdään osamurtokehitelmä:

$$\frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5} = \frac{A(s^2+2s+5) + s(Bs+C)}{s(s^2+2s+5)} = \frac{(A+B)s^2 + (2A+C)s + 5A}{s(s^2+2s+5)}$$

$$\Rightarrow \quad (A+B)s^2 + (2A+C)s + 5A \equiv 1 \qquad \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 5A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \\ C = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Esimerkki: Massakappale

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+5)} = \frac{\frac{1}{5}}{s} - \frac{\frac{1}{5}s + \frac{2}{5}}{s^2+2s+5} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s} - \left(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right)\right)$$

Vasteeksi saadaan:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \tfrac{1}{5}\left(1 - \left(e^{-t}\cos(2t) + \tfrac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right)\right)$$

Pengerherätteellä:

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \qquad Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s^2+2s+5)}$$

Osamurtokehitelmän avulla vasteeksi saadaan :

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \tfrac{1}{5}\left(t - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5}e^{-t}\cos(2t) - \tfrac{3}{10}e^{-t}\sin(2t)\right)$$

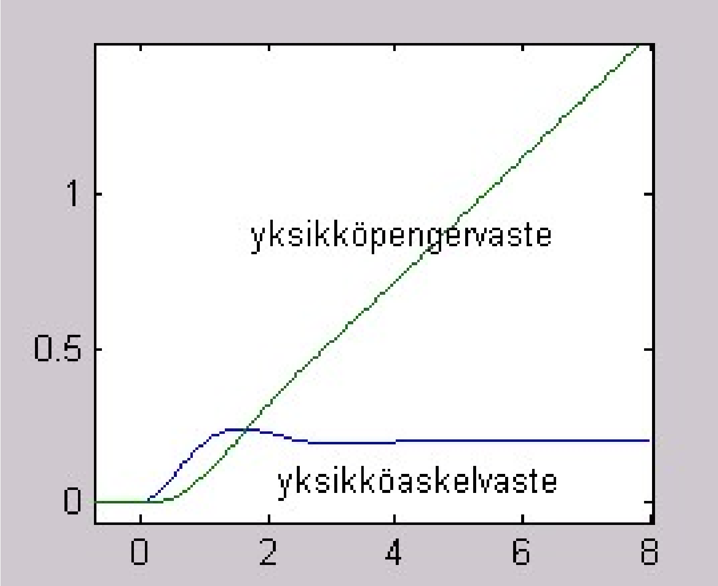
Esimerkki: Massakappale

Katsotaan, miten vasteet saadaan laskettua MATLABissa symbolisesti

```
ilaplace(1/(s^3+2*s^2+5*s))
ans=1/5-1/5*exp(-t)*cos(2*t)-1/10*exp(-t)*sin(2*t)

ilaplace(1/((s^2)*(s^2+2*s+5)))
ans =1/5*t-2/25+2/25*exp(-t)*cos(2*t)-3/50*exp(-t)*sin(2*t)
```

Saadaan samat tulokset



Staattinen vahvistus

Systeemin staattinen vahvistus kertoo kuinka paljon signaali vahvistuu tai vaimenee kuljettuaan systeemin läpi

- Yksikköaskelvasteella staattinen vahvistus kertoo mille tasolle vaste tulee jäämään (asymptoottisesti stabiililla systeemillä)
- Yksikköpengervasteella staattinen vahvistus kertoo vasteen kulmakertoimen jatkuvuustilassa (asymptoottisesti stabiililla systeemillä)

Staattinen vahvistus voidaan laskea siirtofunktiosta raja-arvon avulla. Staattinen vahvistus voidaan määrittää myös epästabiilien systeemien siirtofunktioille, mutta tällöin sillä ei ole fysikaalista tulkintaa, joka liittyisi vasteen loppuarvoon.

Staatinen vahvistus on $\bar{k} = \lim_{s \to 0} \{ G(s) \}$

Esimerkki: Massakappale

Määritetään massakappaleelle systeemin staattinen vahvistus

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{k} = \lim_{s \to 0}\{G(s)\} = \lim_{s \to 0}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\} = \frac{1}{5}$$

Staattinen vahvistus nähdään myös vasteista

- Yksikköaskelvaste

$$y(t) = \tfrac{1}{5}\left(1 - \left(e^{-t}\cos(2t) + \tfrac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right)\right)$$

- Yksikköpengervaste

$$y(t) = \tfrac{1}{5}\left(t - \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5}e^{-t}\cos(2t) - \tfrac{3}{10}e^{-t}\sin(2t)\right)$$

MATLAB: mallit, herätteet ja vasteet

- Mallin syöttäminen työtilaan
  - Siirtofunktion tai tilaesityksen voi kirjoittaa **`tf`**, **`zpk`** ja **`ss`** –komennoilla.
- Esimerkiksi esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä
  - Järjestelmää kuvaa differentiaaliyhtälö:

$$m\ddot{x}(t)+B\dot{x}(t)+kx(t)=F(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+5x(t)=u(t)$$

  - Syötetään työtilaan **`sys=tf(1,[1 2 5])`**

```
Transfer function:          1
                     -------------
                     s^2 + 2 s + 5
```

  - Tarkastellaan impulssi- ja askelvasteita

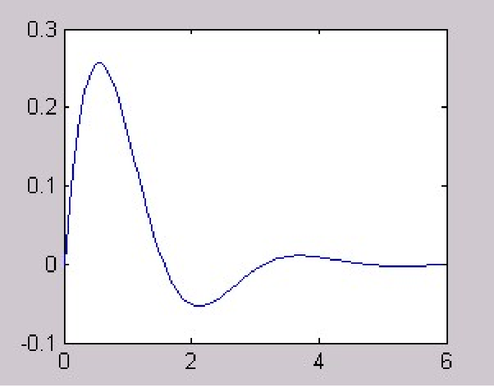
```
[imp1,t1]=impulse(sys);
```

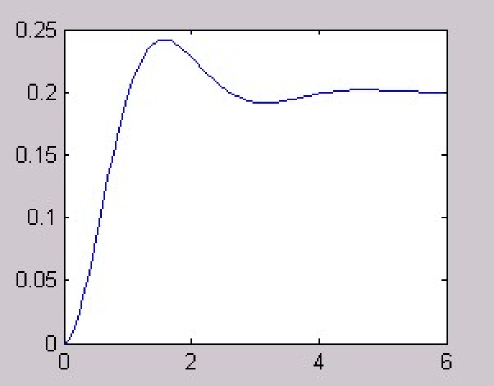
(Tai: **`[imp1,t1]=impulse(tf(1,[1 2 5]));`**)

```
[ste2,t2]=step(sys);
plot(t1,imp1)
plot(t2,ste2)
```

MATLAB: mallit, herätteet ja vasteet

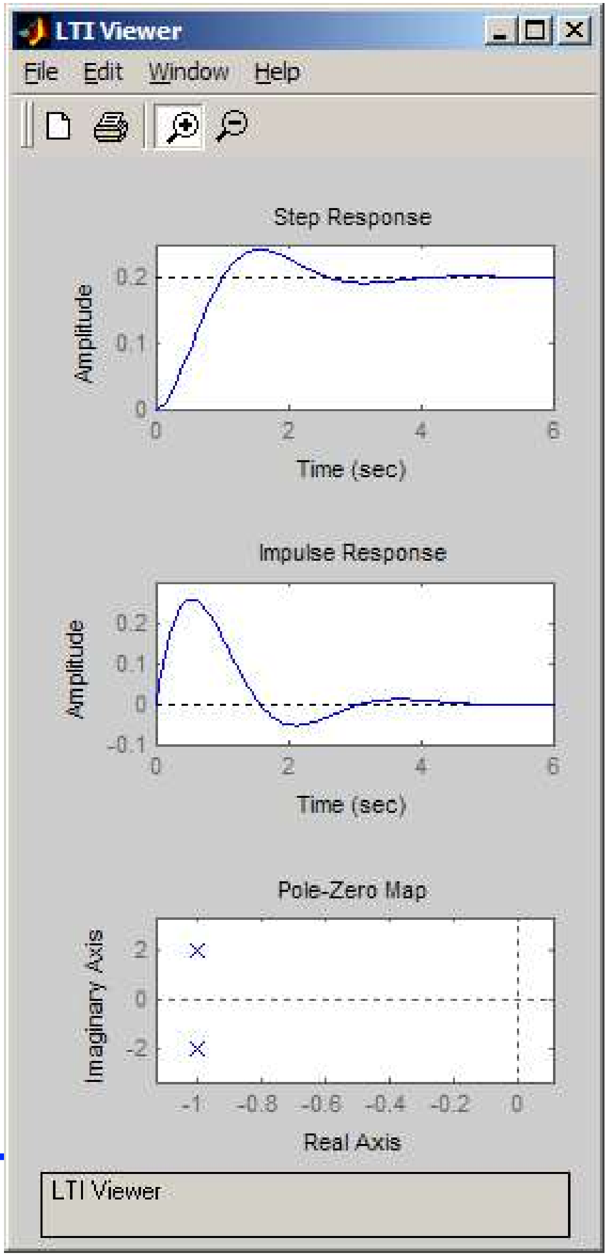
- Saadaan vasteet





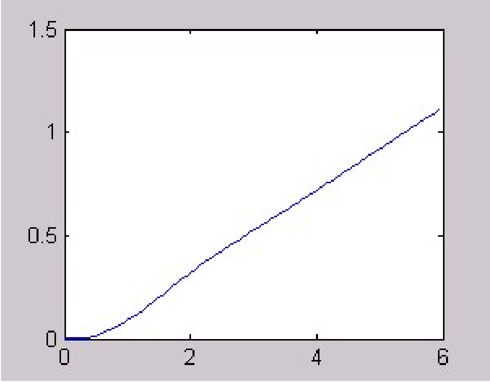
- Vahvistukseksi saadaan
  - **`k=dcgain(sys)`**

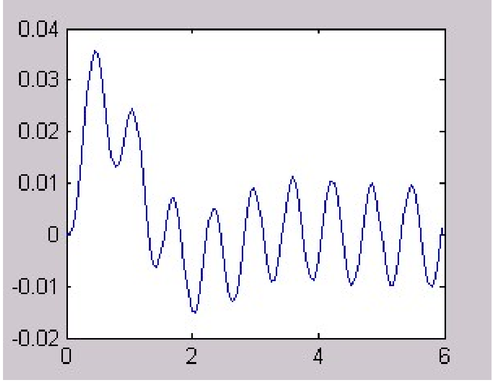
    `k =0.2000`
- Vasteita voidaan tarkastella myös **`ltiview`**-ikkunan avulla
  - **`ltiview`**
    - **`file -> import -> sys`**
    - **`edit -> plot configurations`**



MATLAB: mallit, herätteet ja vasteet

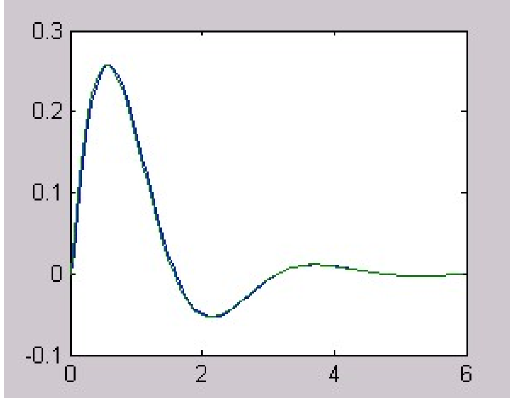
- Perusvasteiden lisäksi voidaan MATLABin työtilassa laskea vasteita mielivaltaisille ohjauksille **`lsim`**-komennolla.
  - Pengervaste
    - **`ram=lsim(sys,t2,t2);`**
    - **`plot(t2,ram)`**
  - Sinivaste
    - **`osc=lsim(sys,sin(10*t2),t2);`**
    - **`plot(t2,osc)`**
  - **`lsim`**–komentoa varten voidaan ottaa jollain toisella komennolla laskettu valmis aikavektori, tai generoida sellainen itse, joko yleisellä MATLABin komennolla (kaksoispisteillä) tai erityisellä **`linspace`**-komennolla
    - **`t3=(0:0.1:10)';`**
    - **`t3=linspace(0,10,101)';`**

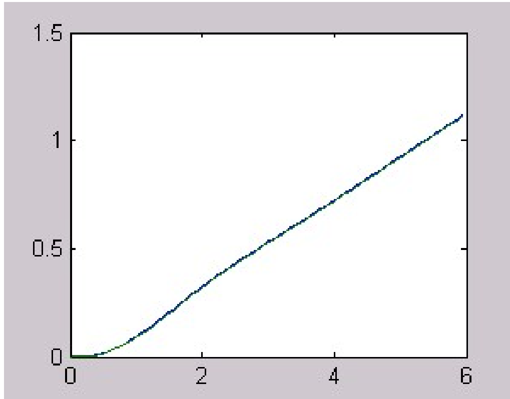




MATLAB: mallit, herätteet ja vasteet

- Aikaisemmilla luennoilla kerrottiin, että perusvasteet saadaan toisistaan derivoimalla ja integroimalla. Kokeillaan, miten hyvin tämä toimii numeerisesti
  - Otetaan askelvaste pohjaksi ja generoidaan impulssivaste numeerisella derivoinnilla ja pengervaste numeerisella integroinnilla
  - Askelvasteen numeerinen derivaatta
    - `imp2=diff(ste2)./diff(t2);`
    - `plot(t2,[0;imp2],t1,imp1)`
  - Askelvasteen numeerinen integraali
    - `delta=mean(diff(t2))`
    - `ram2=cumsum(ste2)*delta;`
    - `plot(t2,[ram2 ram])`
- Numeerinen derivointi ja integrointi toimivat kohtuullisen hyvin tässä (häiriöttömässä) tapauksessa.





MATLAB: vasteiden laskenta symbolisesti

- Vasteita voidaan laskea symbolisesti MATLABin Symbolic Math Toolboxilla.
  - Määritellään symboliset muuttujat ja lasketaan vasteet

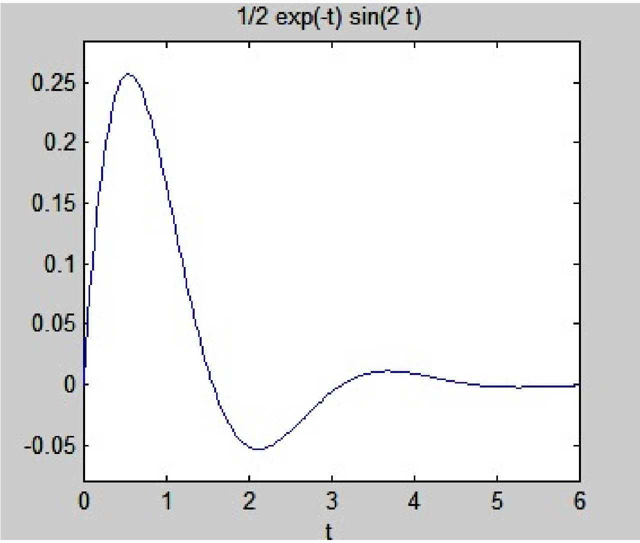
```
syms t s
G=1/(s^2+2*s+5)
ilaplace(G)
ans = -1/16*(-16)^(1/2)*(exp((-1+1/2*(-16)^(1/2))*t)-exp((-1-
1/2*(-16)^(1/2))*t))
```

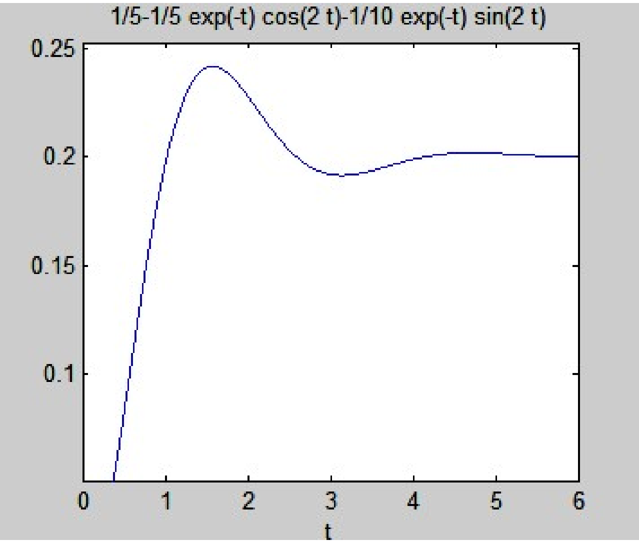
  - Siirtofunktion nimittäjällä on kompleksiset juuret ja seurauksena vasteessa on kompleksisia termejä (voidaan muuntaa reaalisiksi – sineiksi ja kosineiksi - Eulerin kaavalla). Kannustetaan kuitenkin symbolista laskentaa esittämään ratkaisu reaalisessa muodossa - esitetään nimittäjä neliöllisinä termeinä.

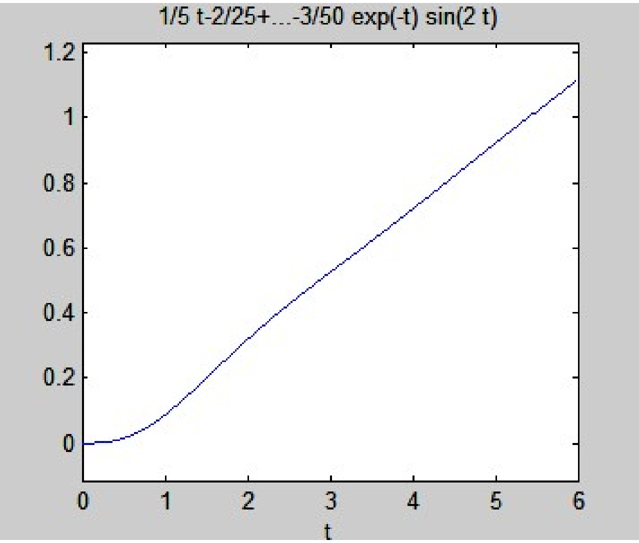
```
G=1/((s+1)^2+2^2)
imps=ilaplace(G)
imps = 1/2*exp(-t)*sin(2*t)
stes=ilaplace(G/s)
stes = 1/5-1/5*exp(-t)*cos(2*t)-1/10*exp(-t)*sin(2*t)
rams=ilaplace(G/(s^2))
rams = 1/5*t-2/25+2/25*exp(-t)*cos(2*t)-3/50*exp(-t)*sin(2*t)
```

MATLAB: vasteiden laskenta symbolisesti

- Ajalle t voidaan nyt sijoittaa arvoja ja vasteet voidaan esittää graafisesti
  - Symbolic Math Toolboxissa voidaan tarkastella symbolisia graafeja **`ezplot`**-komennolla.
    - **`ezplot(imps,[0 6])`**
    - **`ezplot(stes,[0 6])`**
    - **`ezplot(rams,[0 6])`**





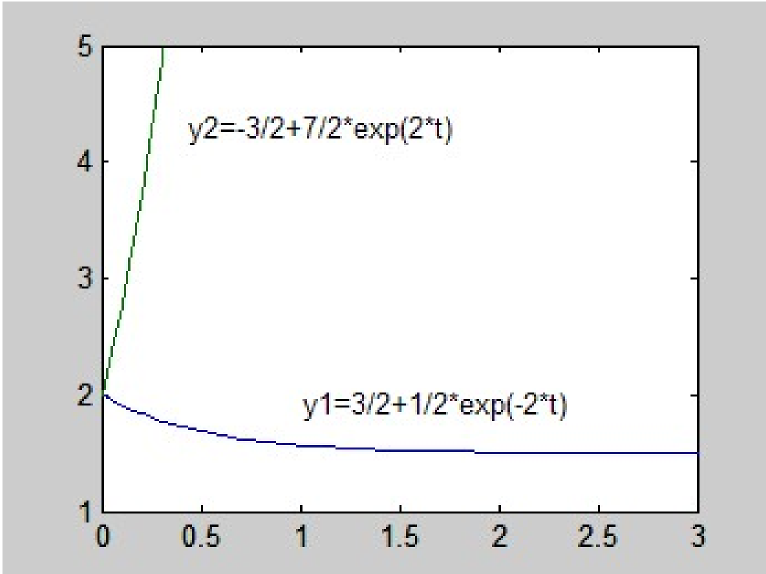


Loppu- ja alkuarvoteoreemat

Loppu- ja alkuarvoteoreemat pätevät ainoastaan, jos kyseiset raja-arvot ovat olemassa

Kokeillaan teoreemien toimivuutta kahdelle vasteelle $y_1(t)$ ja $y_2(t)$:

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ y_2(t) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}e^{2t} \end{cases}$$



Vasteiden Laplace-muunnokset ovat

$$\begin{cases} Y_1(s) = \dfrac{2s+3}{s(s+2)} \\ Y_2(s) = \dfrac{2s+3}{s(s-2)} \end{cases}$$

Loppu- ja alkuarvoteoreemat

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{s\to\infty}\{s\cdot Y_1(s)\} = \lim\limits_{s\to\infty}\left\{s\cdot\dfrac{2s+3}{s(s+2)}\right\} = 2 \\
\lim\limits_{s\to 0}\{s\cdot Y_1(s)\} = \lim\limits_{s\to 0}\left\{s\cdot\dfrac{2s+3}{s(s+2)}\right\} = \tfrac{3}{2} \\
\lim\limits_{s\to\infty}\{s\cdot Y_2(s)\} = \lim\limits_{s\to\infty}\left\{s\cdot\dfrac{2s+3}{s(s-2)}\right\} = 2 \\
\lim\limits_{s\to 0}\{s\cdot Y_2(s)\} = \lim\limits_{s\to 0}\left\{s\cdot\dfrac{2s+3}{s(s-2)}\right\} = -\tfrac{3}{2}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\{y_1(t)\} &= \lim_{t\to 0}\left\{\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}e^{-2t}\right\} = 2 \\
\lim_{t\to \infty}\{y_1(t)\} &= \lim_{t\to \infty}\left\{\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}e^{-2t}\right\} = \tfrac{3}{2} \\
\lim_{t\to 0}\{y_2(t)\} &= \lim_{t\to 0}\left\{-\tfrac{3}{2}+\tfrac{7}{2}e^{2t}\right\} = 2 \\
\lim_{t\to \infty}\{y_2(t)\} &= \lim_{t\to \infty}\left\{-\tfrac{3}{2}+\tfrac{7}{2}e^{2t}\right\} = \infty
\end{aligned}
$$

- Loppu- ja alkuarvoteoreemat pätevät ainoastaan vasteelle $y_1(t)$.
- Vaste $y_2(t)$ on epästabiili ja sille pätee ainoastaan alkuarvoteoreema – lopputilalla ei ole olemassa raja-arvoa
- Yleisesti loppuarvoteoreema pätee ainoastaan asymptoottisesti stabiileille systeemeille.

Tilaesityksestä siirtofuntioon

Konvoluutiointegraalin ratkaiseminen on työlästä ja usein päästään helpommalla, jos tilayhtälö jätetään Laplace-tasoon, heräte Laplace-muunnetaan ja vaste käänteismuunnetaan (aivan kuten yleisessä vasteen ratkaisemisessa).

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{x}(0) + L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right\}$$

$$= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + L^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right\} = \mathbf{x_0}(t) + \mathbf{x_u}(t)$$

Lähtösuureelle saadaan vastaavasti:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = \mathbf{C}\Big((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\Big) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \Big(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\Big)\mathbf{U}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

$$= \mathbf{Y_0}(s) + \mathbf{Y_u}(s)$$

$$\mathbf{y}(t) = L^{-1}\left\{\mathbf{Y}(s)\right\}$$

Tilaesityksestä siirtofunktioon

Tästä saadaan kaava, jonka avulla voidaan määrittää siirtofunktio tilaesityksestä (siirtofunktiohan määriteltiin tulosuureiden ja lähtösuureiden väliseksi riippuvuudeksi Laplace-tasossa – silloin kun alkuarvoja ei oteta huomioon)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Usein suoravaikutustermiä $\mathbf{D}$ ei ole, jolloin kaava vielä yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Esimerkki: Massakappale

- Ratkaistaan massakappaleen yksikköaskelvaste (nollatilavaste) siirtofunktion avulla

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2+2s+5} = \frac{1}{s^2+2s+5}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

- Vasteeksi saadaan

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{G(s)U(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{5}\left(1-\left(e^{-t}\cos(2t)+\tfrac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right)\right)$$

Mallit ja muunnokset niiden välillä