

## ELEC-C1230 Säättötekniikka

Luku 3: Dynaamisen vasteen määrittäminen,  
Laplace-muunnos, siirtofunktio

## Luku 3: Lukuohje

- Laplace-muunnos ja käänteismuunnos
- Impulssifunktio, askelfunktio, pengerfunktio (rampifunktio). Impulssivaste, askelvaste, pengervaste
- Siirtofunktio, painofunktio
- Loppuarvoteoreema ja staattinen vahvistus
- Differentiaaliyhtälöstä siirtofunktioon ja päinvastoin
- Tilaesityksestä siirtofunktioon
- Toteutukset ja laskut Matlabilla

## Differentiaaliyhtälön ratkaisu

- Systeemin ymmärtämisen ja hallinnan kannalta on olennaista tietää, miten lähtösuure  $y(t)$  käyttäytyy ajan funktiona eri tilanteissa ja eri ohjauksilla  $u(t)$ .
- Koska mallit ovat differentiaaliyhtälöitä, niin lähtösuureen käyttäytymisen selvittäminen pelkistyy differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen annetuilla herätteillä ja alkuarvoilla.
- Epälineaarille tai jakautuneiden parametrien differentiaaliyhtälöryhmälle ei aina löydy analyttistä ratkaisua
- Lineaarille, koottujen parametrien, tarkasti määritetyille differentiaaliyhtälöryhmälle voidaan aina määrittää analyttinen ratkaisu

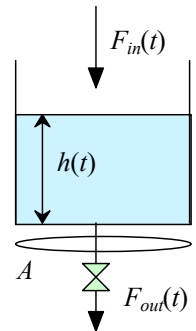
## Esimerkki: läpivirtaussäiliö

Tarkastellaan läpivirtaussäiliötä, josta on vapaa purkautuminen ilmanpaineeseen. Herätteenä on tulovirtaus  $F_{in}(t)$  ja vasteena pinnankorkeus  $h(t)$ . Poistovirtaus  $F_{out}(t)$  on suoraan verrannollinen pinnankorkeuden neliöjuureen.

$$F_{out}(t) = k\sqrt{h(t)}$$

Pohjan pinta-ala  $A = 1 \text{ m}^2$  ja purkauskerroin  $k = 2 \text{ m}^{5/2}/\text{h}$ . Alkuhetkellä pinnankorkeus  $h(0) = 1 \text{ m}$

Määritetään kauanko säiliön tyhjentymisen kestää, kun tulovirtaus katkaistaan; eli  $F_{in}(t) = 0 \text{ m}^3/\text{h}$ , kun  $t \geq 0$ .



## Esimerkki: läpivirtaussäiliö

Prosessille saadaan massataseesta malli:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt} = F_{in}(t) - F_{out}(t) = F_{in}(t) - k\sqrt{h(t)}$$
$$\Rightarrow \frac{dh(t)}{dt} = -2m^{1/2}h^{-1} \cdot \sqrt{h(t)}$$

Ratkaistaan pinnankorkeuden aikariippuvuus integroinnilla

$$\frac{dh(t)}{\sqrt{h(t)}} = -2m^{1/2}h^{-1} dt \Rightarrow \int_{h(0)}^{h(t)} \frac{1}{\sqrt{h(t)}} dh(t) = -2m^{1/2}h^{-1} \int_0^t dt$$
$$\int_{h(0)}^{h(t)} 2\sqrt{h(t)} = -2m^{1/2}h^{-1} \int_0^t dt \Rightarrow \sqrt{h(t)} - \sqrt{h(0)} = -t m^{1/2}h^{-1}$$
$$\Rightarrow h(t) = (\sqrt{h(0)/m} - t/h)^2 m$$

## Esimerkki: läpivirtaussäiliö

Kun tähän sijoitetaan alkuarvo  $h(0) = 1$  m ja lopputilan arvo  $h(t_F) = 0$  m, niin säiliön tyhjenemisen ajanhetkeksi  $t_F$  saadaan

$$h(t_F) = 0 \text{ m} = (1 - t_F / h)^2 \text{ m} \Rightarrow t_F = 1h$$

Eli säiliö tyhjenee tunnissa

## Lineaarisen differentiaaliyhtälön ratkaisu

Edellisessä esimerkissä pinnankorkeuden aikariippuvuus (vaste tulovirtauksen katkaisemiselle) ratkaistiin systeemin epälineaarisesta mallista suoralla integroinnilla.

Lineaarinen differentiaaliyhtälö/-yhtälöryhmä voidaan ratkaista mekaanisesti Laplace-muunnoksen avulla

- Laplace-muunnetaan systeemiä kuvaavat differentiaaliyhtälöt ja systeemin tulosuuret
- Ratkaistaan saadusta algebrallisesta yhtälöstä lähtösuure
- Laplace-käänteismuunnetaan lähtösuureen lauseke

Säätötekniikan sovelluksissa kaikki ajan funktiot ovat nollia ennen alkuaikaa:

$$f(t) \equiv 0, \quad \text{kun } t < 0$$

## Esimerkki

Aikatason  
ongelma

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + 2y(t) = e^{-t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aikatason  
ratkaisu

$$y(t) = e^{-t}$$

Laplace-tason  
ongelma

$$\begin{cases} \{sY(s) - y(0)\} + \{2Y(s)\} = \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Laplace-tason  
ratkaisu

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

## Laplace-muunnos

- Määritelmä:  $f(t)$  on ajan funktio ja  $F(s)$  on sitä vastaava Laplace-tason esitys)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

- Jos raja-arvot ovat olemassa, niin niille pätee

- Loppuarvoteoreema  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

- Alkuarvoteoreema  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

- Laplace-taulukot on esitetty eri lähteissä hieman erilaisina (yleensä joko niin, että ajan funktiot on helppo Laplace-muuntaa tai niin, että Laplace-tason esitys voidaan käänteismuuntaa helposti.

## Laplace-teoreemoja

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
$F(s)$	$f(t)$	T1
$C_1F_1(s) + C_2F_2(s)$	$C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$	T2
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	T3
$e^{-as}F(s)$	$\begin{cases} 0, & t \leq a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$	T4
$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	T5
$-\frac{d}{ds}F(s)$	$f(t)t$	T6

## Laplace-teoreemoja

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
$\int_s^{\infty} F(\sigma) d\sigma$	$f(t) \frac{1}{t}$	T7
$F_1(s)F_2(s)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau$	T8
$sF(s) - f(0)$	$\dot{f}(t)$	T9
$s^2F(s) - (sf(0) + \dot{f}(0))$	$\ddot{f}(t)$	T10
$s^n F(s) - (s^{n-1}f(0) + s^{n-2}\dot{f}(0) + \dots + f^{(n-1)}(0))$	$f^{(n)}(t)$	T11
$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \Big _{t=+0}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	T12

## Laplace-muunnospareja

Laplace-muunnos	Ajan funktio		Laplace-muunnos	Ajan funktio	
1	$\delta(t)$	M1	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$	M9
$\frac{1}{s}$	1	M2	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(b-a)}(ae^{-bt} - be^{-at})$	M10
$\frac{1}{s^2}$	$t$	M3	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$	M11
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	M4	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	M12
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	M5	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt} \sin(at)$	M13
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	M6	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt} \cos(at)$	M14
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	M7	$\frac{s+a}{s+b}$	$\delta(t) + (a-b)e^{-bt}$	M15
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	M8			

**TABLE 3.1** AN INITIAL LIST OF TRANSFORM PAIRS

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulssi $\delta(t)$ Diracin delta	1
2	Askel $u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$e^{-a}u_s(t)$	$\frac{1}{s+a}$
4	Penger $tu_s(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5	$t^n u_s(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	$(\sin \omega t)u_s(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$(\cos \omega t)u_s(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

**TABLE 3.2** ADDITIONAL TRANSFORM PAIRS

	$f(t)$	$F(s)$
8	$te^{-at}u_s(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
9	$(e^{-at} \sin \omega t)u_s(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10	$(e^{-at} \cos \omega t)u_s(t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$
11	$[(B - Aa)te^{-at} + Ae^{-at}]u_s(t)$	$\frac{As + B}{(s+a)^2}$
12	$e^{-at} \left[ A \cos \omega t + \frac{(B - Aa)}{\omega} \sin \omega t \right] u_s(t)$	$\frac{(As + B)}{(s+a)^2 + \omega^2}$

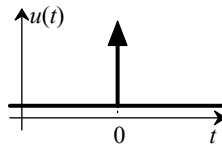
### Deterministiset testifunktiot

- Systemin herätteenä  $u(t)$  käytetään usein seuraavia signaaleja

- Yksikköimpulssifunktio (Diracin deltafunktio)

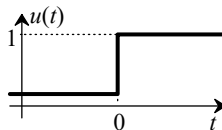
$$u_\delta(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty; & t = 0_+ \\ 0; & \text{muulloin} \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$U_\delta(s) = \Delta(s) = 1$$



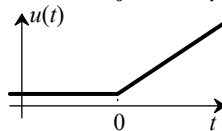
- Yksikköaskelfunktio

$$u_s(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ 1; & t > 0 \end{cases} \quad U_s(s) = \frac{1}{s}$$



- Yksikköpengerfunktio

$$u_r(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ t; & t > 0 \end{cases} \quad U_r(s) = \frac{1}{s^2}$$



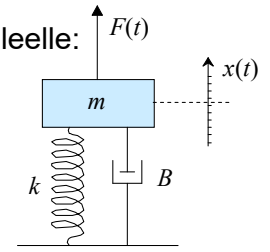
### Esimerkki: Massakappale

Edellisellä luennolla johdettiin massakappaleelle:

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

Ratkaistaan vaste, kun

$$\begin{cases} k = 5 & x(0) = 1 \\ B = 2 & \dot{x}(0) = -1 \\ m = 1 & F(t) = 2\delta(t) \text{ (impulssi)} \end{cases}$$



Massakappaleen malli aikatasossa  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 2\delta(t)$  ja Laplace-muunnettuna:

$$(s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + 2 \cdot (sX(s) - x(0)) + 5 \cdot X(s) = 2 \cdot 1$$

$$(s^2 X(s) - s + 1) + 2(sX(s) - 1) + 5X(s) = 2 \Rightarrow (s^2 + 2s + 5)X(s) = s + 3$$

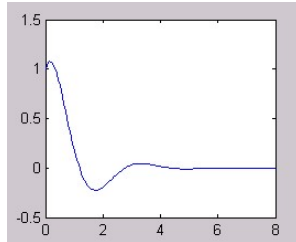
## Esimerkki: Massakappale

Ratkaistaan lausekkeesta massakappaleen paikka  $X(s)$ :

$$X(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5} = \frac{s+1+2}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

Käänteismuunnetaan takaisin aikatasoon

$$x(t) = L\{X(s)\} = e^{-t} \cos(2t) + e^{-t} \sin(2t) = e^{-t} (\sin(2t) + \cos(2t))$$



## Nollatila- ja nollaohjausvasteet

- Vasteesta voidaan erottaa alkuarvoista johtuva vaste  $y_0(t)$  (nollaohjausvaste) ja ulkoisesta ohjauksesta johtuva vaste  $y_u(t)$  (nollatilavaste). Linearisella järjestelmällä kokonaisvaste on näiden kahden vasteen summa.

$$y(t) = y_u(t) + y_0(t)$$

- Nollaohjausvaste  $y_0(t)$  on vaste silloin, kun ulkoiset ohjaukset eivät vaikuta systeemiin  $u_i(t) = 0$ .
- Nollatilavaste  $y_u(t)$  on vaste silloin, kun kaikki systeemin alkuarvot  $y^{(n)}(0)$  ja  $u_i^{(n)}(0)$  ovat nollia.
- Usein termillä "vaste" tarkoitetaan nollatilavastetta eli vastetta johonkin ulkoiseen herätykseen – huomioimatta alkuarvoja.

## Esimerkki 2: Massakappale

- Määritetään edellisestä esimerkistä nollatila- ja nollaohjausvasteet

$$(s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + 2 \cdot (sX(s) - x(0)) + 5 \cdot X(s) = 2 \cdot \Delta(s)$$

$$(s^2 + 2s + 5)X(s) = (sx(0) + \dot{x}(0) + 2x(0)) + 2\Delta(s)$$

$$X(s) = \frac{(sx(0) + \dot{x}(0) + 2x(0))}{s^2 + 2s + 5} + \frac{2\Delta(s)}{s^2 + 2s + 5} = X_0(s) + X_u(s)$$

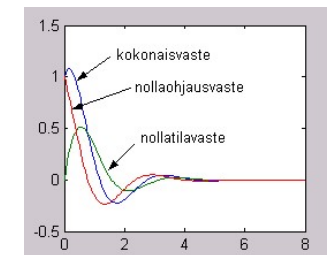
$$X(s) = X_0(s) + X_u(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$x(t) = L\{X(s)\} = L\{X_0(s) + X_u(s)\} = e^{-t} \cos(2t) + e^{-t} \sin(2t) = x_0(t) + x_u(t)$$

## Esimerkki 2: Massakappale

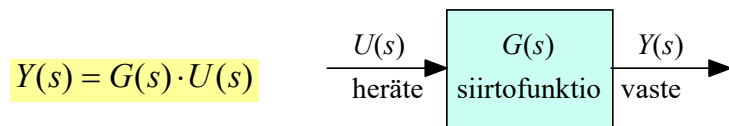
- Nollaohjausvaste lähtee alkutilasta systeemin alkuarvojen johdosta (massakappaleen sijainti alkuhetkellä on 1 ja sen alkunopeus -1)
- Nollatilavaste lähtee levosta ulkoisen ohjauksen eli voiman johdosta (impulssimainen nykäisy alkuhetkellä)

$$\begin{cases} x_0(t) = e^{-t} \cos(2t) \\ x_u(t) = e^{-t} \sin(2t) \\ x(t) = e^{-t} (\cos(2t) + \sin(2t)) \end{cases}$$



## Siirtofunktio

- Sääätötekniikassa tutkitaan tavallisesti, miten ulkoiset ohjaukset ja häiriöt vaikuttavat vasteeseen; alkuarvojen vaikutus jätetään tällöin huomioimatta ja keskitytään nollatilavasteeseen.
- Kun alkuarvoja ei ole, niin vasteen lauseke saa muodon, jossa lähtösuure  $Y(s)$  on tulo mallin Laplace-tason esityksestä  $G(s)$  ja tulosuureen Laplace-muunnoksesta  $U(s)$ .
- Mallin Laplace-tason esitys  $G(s)$  on nimeltään siirtofunktio.



$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau^*) u(\tau^*) d\tau^* = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

## Siirtofunktion määrittäminen

- Laplace-muunnetaan systeemiä kuvaavat differentiaaliyhtälöt olettaen kaikki alkuarvot nolliksi (tällöin derivointia vastaa Laplace-tasossa  $s$ :llä kertominen)
- Siirtofunktio  $G(s)$  on lähtösuureen  $Y(s)$  ja tulosuureen  $U(s)$  osamäärä.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- Mikäli tulo- ja lähtösuureita on useita (MIMO-malli), niin yksittäisen tulosuureen vaikutus yksittäiseen lähtösuureeseen voidaan määrittää olettamalla muut suureet nolliksi. Kun tämä toistetaan jokaiselle tulo- ja lähtösuureelle, niin saadaan siirtofunktio-matriisi, joka noudattaa matriisiyhtälöä

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

## Siirtofunktion määrittäminen

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_{n_y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1n_u}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2n_u}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n_y1}(s) & G_{n_y2}(s) & \cdots & G_{n_y n_u}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_{n_u}(s) \end{bmatrix}$$

Painofunktio  $g(t)$  on Laplace-käänteismuunnos siirtofunktiosta ja samalla myös systeemin yksikköimpulssivaste. Joissain tapauksissa siirtofunktio voidaan määrittää kokeellisesti syöttämällä systeemiin impulssimainen heräte, mittaamalla vaste ja Laplace-muuntamalla vasteeseen sovitettu matemaattinen lauseke.

$$\begin{cases} g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \\ G(s) = L\{g(t)\} \end{cases}$$

## Differentiaaliyhtälöstä siirtofunktioon

Differentiaaliyhtälöstä voidaan päästä siirtofunktioon myös oikotietä. Yleinen lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y^{(1)}(t) + a_n y(t) = b_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_{n-1} u^{(1)}(t) + b_n u(t)$$

on Laplace-muunnettuna (ja olettaen alkuarvot nolliksi)

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n) U(s)$$

Tästä on helppo muodostaa siirtofunktio

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

Vastaavasti päästään siirtofunktiosta takaisin differentiaaliyhtälöihin

## Esimerkki: Massakappale

Määritetään edellisen esimerkin siirtofunktio ja painofunktio

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = F(t) \quad \begin{cases} y(t) = x(t) \\ u(t) = F(t) \end{cases}$$

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = u(t) \Rightarrow s^2 Y(s) + 2sY(s) + 5Y(s) = U(s)$$

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2s + 5}\right\} = \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right\} = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t)$$

Painofunktio on nyt sama kuin yksikköimpulssivaste

## Vasteen määrittäminen

Kun siirtofunktio tunnetaan, niin vaste (nollatilavaste) lasketaan seuraavasti

- Laplace-muunnetaan ulkoinen ohjaus  $u(t)$   $U(s) = L\{u(t)\}$
- Ratkaistaan lähtösuure  $Y(s)$   $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
- Käänteismuunnetaan lähtösuure aikatasoon  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$

Eli:

$$y(t) = L^{-1}\{G(s) \cdot L\{u(t)\}\}$$

## Esimerkki: Massakappale

Määritetään massakappaleelle yksikköaskel- ja -pengerivasteet. Aikaisemmin systeemille määritettiin siirtofunktio

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

Yksikköaskeleelle  $U(s) = \frac{1}{s}$

Vasteelle:  $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}$

Tehdään osamurtokehiteelmä:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5} = \frac{A(s^2 + 2s + 5) + s(Bs + C)}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{(A + B)s^2 + (2A + C)s + 5A}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

$$\Rightarrow (A + B)s^2 + (2A + C)s + 5A \equiv 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 5A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \\ C = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

## Esimerkki: Massakappale

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{\frac{1}{5}}{s} - \frac{\frac{1}{5}s + \frac{2}{5}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{s} - \left( \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} \right) \right)$$

Vasteeksi saadaan:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{5} \left( 1 - (e^{-t} \cos(2t) + \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t)) \right)$$

Pengerherätteellä:

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \quad Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s^2 + 2s + 5)}$$

Osamurtokehitelemän avulla vasteeksi saadaan :

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{5} \left( t - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{10} e^{-t} \sin(2t) \right)$$

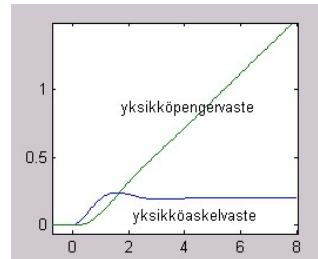
## Esimerkki: Massakappale

Katsotaan, miten vasteet saadaan laskettua MATLABissa symbolisesti

```
ilaplace(1/(s^3+2*s^2+5*s))
ans=1/5-1/5*exp(-t)*cos(2*t)-1/10*exp(-t)*sin(2*t)

ilaplace(1/((s^2)*(s^2+2*s+5)))
ans =1/5*t-2/25+2/25*exp(-t)*cos(2*t)-3/50*exp(-t)*sin(2*t)
```

Saadaan samat tulokset



## Staattinen vahvistus

Systeemin staattinen vahvistus kertoo kuinka paljon signaali vahvistuu tai vaimenee kuljettuaan systeemin läpi

- Yksikköaskelvasteella staattinen vahvistus kertoo mille tasolle vaste tulee jäämään (asymptootisesti stabiililla systeemillä)
- Yksikköpöngervasteella staattinen vahvistus kertoo vasteen kulmakertoimen jatkuvuustilassa (asymptootisesti stabiililla systeemillä)

Staattinen vahvistus voidaan laskea siirtofunktiosta raja-arvon avulla. Staattinen vahvistus voidaan määrittää myös epästabiilien systeemien siirtofunktiolle, mutta tällöin sillä ei ole fysikaalista tulkintaa, joka liittyisi vasteen loppuarvoon.

Staattinen vahvistus on  $\bar{k} = \lim_{s \rightarrow 0} \{G(s)\}$

## Esimerkki: Massakappale

Määritetään massakappaleelle systeemin staattinen vahvistus

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

$$\Rightarrow \bar{k} = \lim_{s \rightarrow 0} \{G(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right\} = \frac{1}{5}$$

Staattinen vahvistus nähdään myös vasteista

- Yksikköaskelvaste

$$y(t) = \frac{1}{5} \left( 1 - \left( e^{-t} \cos(2t) + \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \right) \right)$$

- Yksikköpöngervaste

$$y(t) = \frac{1}{5} \left( t - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{10} e^{-t} \sin(2t) \right)$$

## MATLAB: mallit, herätteet ja vasteet

- Mallin syöttäminen työtilaan
  - Siirtofunktion tai tilaesityksen voi kirjoittaa `tf`, `zpk` ja `ss` -komennoilla.

- Esimerkiksi esimerkki 2:n mekaaninen järjestelmä

- Järjestelmää kuvaa differentiaaliyhtälö:

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = u(t)$$

- Syötetään työtilaan `sys=tf(1,[1 2 5])`

Transfer function:  $\frac{1}{s^2 + 2s + 5}$

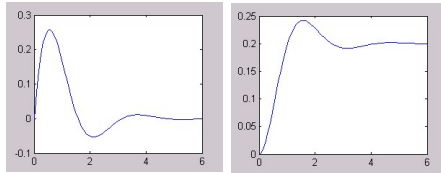
- Tarkastellaan impulssi- ja askelvasteita

```
[imp1,t1]=impz(sys);
(Tai: [imp1,t1]=impz(tf(1,[1 2 5]));)
[ste2,t2]=step(sys);
plot(t1,imp1)
plot(t2,ste2)
```



## MATLAB: mallit, herätteet ja vasteet

- Saadaan vasteet

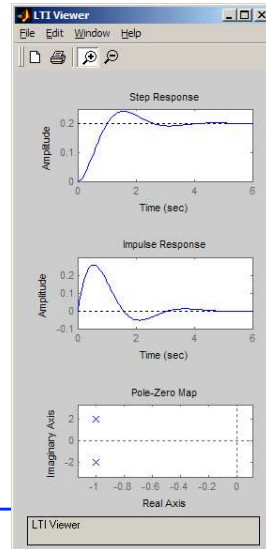


- Vahvistukseksi saadaan

- `k=dcgain(sys)`  
`k = 0.2000`

- Vasteita voidaan tarkastella myös `ltiview`-ikkunan avulla

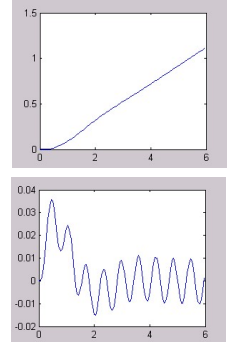
- `ltiview`
  - `file -> import -> sys`
  - `edit -> plot configurations`



## MATLAB: mallit, herätteet ja vasteet

- Perusvasteiden lisäksi voidaan MATLABin työtilassa laskea vasteita mielivaltaisille ohjauksille `lsim`-komennolla.

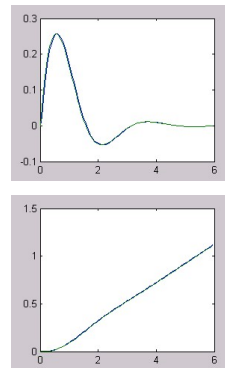
- Pengervaste
  - `ram=lsim(sys, t2, t2);`
  - `plot(t2, ram)`
- Sinivaste
  - `osc=lsim(sys, sin(10*t2), t2);`
  - `plot(t2, osc)`
- `lsim`-komentoa varten voidaan ottaa jollain toisella komennolla laskettu valmis aikavektori, tai generoida sellainen itse, joko yleisellä MATLABin komennolla (kaksoispisteillä) tai erityisellä `linspace`-komennolla
  - `t3=(0:0.1:10)';`
  - `t3=linspace(0,10,101)';`



## MATLAB: mallit, herätteet ja vasteet

- Aikaisemmilla luennoilla kerrottiin, että perusvasteet saadaan toisistaan derivoimalla ja integroimalla. Kokeillaan, miten hyvin tämä toimii numeerisesti

- Otetaan askelvaste pohjaksi ja generoidaan impulssivaste numeerisella derivoinnilla ja pengervaste numeerisella integroinnilla
- Askelvasteen numeerinen derivaatta
  - `imp2=diff(ste2)./diff(t2);`
  - `plot(t2, [0;imp2], t1, imp1)`
- Askelvasteen numeerinen integraali
  - `delta=mean(diff(t2))`
  - `ram2=cumsum(ste2)*delta;`
  - `plot(t2, [ram2 ram])`



- Numeerinen derivointi ja integrointi toimivat kohtuullisen hyvin tässä (häiriöttömässä) tapauksessa.

## MATLAB: vasteiden laskenta symbolisesti

- Vasteita voidaan laskea symbolisesti MATLABin Symbolic Math Toolboxilla.

- Määritellään symboliset muuttujat ja lasketaan vasteet

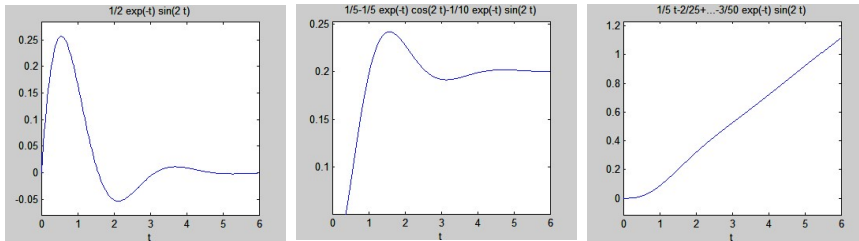
```
syms t s
G=1/(s^2+2*s+5)
ilaplace(G)
ans = -1/16*(-16)^(1/2)*(exp((-1+1/2*(-16)^(1/2))*t)-exp((-1-1/2*(-16)^(1/2))*t))
```

- Siirtofunktion nimittäjällä on kompleksiset juuret ja seurauksena vasteessa on kompleksisia termejä (voidaan muuntaa reaalisiksi – sineiksi ja kosineiksi - Eulerin kaavalla). Kannustetaan kuitenkin symbolista laskentaa esittämään ratkaisu reaalisessa muodossa - esitetään nimittäjä neliöllisinä termeinä.

```
G=1/((s+1)^2+2^2)
imps=ilaplace(G)
imps = 1/2*exp(-t)*sin(2*t)
stes=ilaplace(G/s)
stes = 1/5-1/5*exp(-t)*cos(2*t)-1/10*exp(-t)*sin(2*t)
rams=ilaplace(G/(s^2))
rams = 1/5*t-2/25+2/25*exp(-t)*cos(2*t)-3/50*exp(-t)*sin(2*t)
```

## MATLAB: vasteiden laskenta symbolisesti

- Ajalle  $t$  voidaan nyt sijoittaa arvoja ja vasteet voidaan esittää graafisesti
  - Symbolic Math Toolboxissa voidaan tarkastella symbolisia graafeja `ezplot`-komennolla.
    - `ezplot(impz, [0 6])`
    - `ezplot(stes, [0 6])`
    - `ezplot(rams, [0 6])`



## Loppu- ja alkuarvoteoreemat

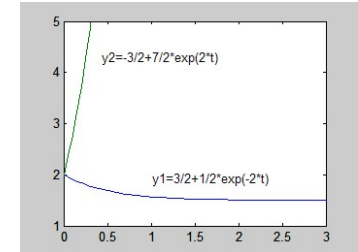
Loppu- ja alkuarvoteoreemat pätevät ainoastaan, jos kyseiset raja-arvot ovat olemassa

Kokeillaan teoreemien toimivuutta kahdelle vasteelle  $y_1(t)$  ja  $y_2(t)$ :

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ y_2(t) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}e^{2t} \end{cases}$$

Vasteiden Laplace-muunnokset ovat

$$\begin{cases} Y_1(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)} \\ Y_2(s) = \frac{2s+3}{s(s-2)} \end{cases}$$



## Loppu- ja alkuarvoteoreemat

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \infty} \{s \cdot Y_1(s)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{s \cdot \frac{2s+3}{s(s+2)}\right\} = 2 \\ \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot Y_1(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{s \cdot \frac{2s+3}{s(s+2)}\right\} = \frac{3}{2} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \{s \cdot Y_2(s)\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{s \cdot \frac{2s+3}{s(s-2)}\right\} = 2 \\ \lim_{s \rightarrow 0} \{s \cdot Y_2(s)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{s \cdot \frac{2s+3}{s(s-2)}\right\} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \{y_1(t)\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right\} = 2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \{y_1(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right\} = \frac{3}{2} \\ \lim_{t \rightarrow 0} \{y_2(t)\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{-\frac{3}{2} + \frac{7}{2}e^{2t}\right\} = 2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \{y_2(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{-\frac{3}{2} + \frac{7}{2}e^{2t}\right\} = \infty \end{cases}$$

- Loppu- ja alkuarvoteoreemat pätevät ainoastaan vasteelle  $y_1(t)$ .
- Vaste  $y_2(t)$  on epästabiili ja sille pätee ainoastaan alkuarvoteoreema – lopputilalla ei ole olemassa raja-arvoa
- Yleisesti loppuarvoteoreema pätee ainoastaan asympotoottisesti stabiileille systeemeille.

## Tilaesityksestä siirtofuntioon

Konvoluutiointegraalin ratkaiseminen on työläästä ja usein päästään helpommalla, jos tilayhtälö jätetään Laplace-tasoon, heräte Laplace-muunnetaan ja vaste käänteisluunnetaan (aivan kuten yleisessä vasteen ratkaisemisessa).

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{x}(t) &= L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} \mathbf{x}(0) + L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \right\} \\ &= \Phi(t) \mathbf{x}(0) + L^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \right\} = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{x}_u(t) \end{aligned}$$

Lähtösuurelle saadaan vastaavasti:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) = \mathbf{C} \left( (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \right) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + \left( \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) \mathbf{U}(s) = \mathbf{C}\Phi(s) \mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s) \\ &= \mathbf{Y}_0(s) + \mathbf{Y}_u(s) \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}(t) = L^{-1} \left\{ \mathbf{Y}(s) \right\}$$

## Tilaesityksestä siirtofunktioon

Tästä saadaan kaava, jonka avulla voidaan määrittää siirtofunktio tilaesityksestä (siirtofunktiohan määriteltiin tulosuureiden ja lähtösuureiden väliseksi riippuvuudeksi Laplace-tasossa – silloin kun alkuarvoja ei oteta huomioon)

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Usein suoravaikutustermiä  $\mathbf{D}$  ei ole, jolloin kaava vielä yksinkertaistuu muotoon

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

## Esimerkki: Massakappale

- Ratkaistaan massakappaleen yksikköaskelvaste (nollatilavaste) siirtofunktion avulla

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

- Vasteeksi saadaan

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{G(s)U(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}\right\}$$

$$= \frac{1}{5} \left( 1 - (e^{-t} \cos(2t) + \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t)) \right)$$

## Mallit ja muunnokset niiden välillä

