ELEC-C1230 Säätötekniikka
2. laskuharjoitus
Vastaukset

1. On osoitettava, että alla oleva differentiaaliyhtälö ja tilaesitys ovat yhtäpitävät.

$$\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)=2u(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

Matriisien kerto- ja yhteenlaskusääntöjä käyttäen yhtälöryhmä saa muodon:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdot x_1(t)+1\cdot x_2(t)\\ -3\cdot x_1(t)-4\cdot x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\cdot u(t)\\ 2\cdot u(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2(t)\\ -3x_1(t)-4x_2(t)+2u(t)\end{bmatrix}$$
$$y(t)=1\cdot x_1(t)+0\cdot x_2(t)=x_1(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-3x_1(t)-4x_2(t)+2u(t)\\ y(t)=x_1(t)\end{cases}$$

Näistä yhtälöistä tahdotaan saada selville IO-kuvaus (input-output) eli herätteen $u(t)$ ja lähtösuureen $y(t)$ välinen riippuvuus. Eliminoidaan IO-kuvauksen kannalta turhat muuttujat $x_1(t)$ ja $x_2(t)$. Sijoitetaan aluksi viimeinen yhtälö $y(t)=x_1(t)$ kahteen edelliseen:

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-3y(t)-4x_2(t)+2u(t)\end{cases}$$

Sijoitetaan nyt ensimmäinen yhtälö $\dot{y}(t)=x_2(t)$ jälkimmäiseen:

$$\ddot{y}(t)=-3y(t)-4\dot{y}(t)+2u(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)=2u(t)$$

Todetaan tilaesityksen ja differentiaaliyhtälön kuvaavan samaa järjestelmää.

2. Kirjoitetaan ensin sama yhtälö hiukan toisella tavalla käyttämällä derivaatalle merkintää

$$p = \frac{d}{dt}, \quad p^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \quad \cdots$$

$$\begin{aligned} & \ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{u}(t) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{d^2}{dt^2}y(t) - 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2\frac{d}{dt}u(t) \\ \Leftrightarrow\ & p^2y(t) - 3py(t) + 2y(t) = 2pu(t) \end{aligned}$$

Siirretään kaikki p:tä eli derivaattaa sisältävät termit vasemmalle ja kaikki muut oikealle

$$\Leftrightarrow\ p^2y(t) - 3py(t) - 2pu(t) = -2y(t)$$

Otetaan p yhteiseksi tekijäksi. (**Huom.** jos yhtälö on korkeampaa astetta, jatketaan yhteisen tekijän ottamista niin kauan, että p:n ykköstä korkeampia potensseja ei esiinny yhtälössä.)

$$\Leftrightarrow\ p\big(py(t) - 3y(t) - 2u(t)\big) = -2y(t)$$

Nyt valitaan tilat siten, että kaikki ne termit, joita jokin p kertoo tulevat jonkin tilamuuttujan arvoksi.

$$\underbrace{p\left(\underbrace{p\,y(t)}_{x_1} - 3y(t) - 2u(t)\right)}_{x_2} = -2y(t) \qquad (1)$$

Eli:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 3x_1(t) - 2u(t) \end{cases}$$

Jälkimmäiseen yhtälöön on sijoitettu ensimmäinen ja siitä voidaan ratkaista $\dot{x}_1(t)$ (alla). Lausekkeelle $\dot{x}_2(t)$ saadaan yhtälöstä (1).

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) \end{cases}$$

Huomataan vielä, että y:lle on edellä saatu yhtälö

$$y(t) = x_1(t)$$

Kolmen viimeksi mainitun yhtälön perusteella voidaan kirjoittaa seuraava tilaesitys

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Tilamuuttujat voidaan valita toisinkin, kunhan tulos on vain hyväksyttävää muotoa oleva tilaesitys. Itse asiassa tilamuuttujat voidaan valita äärettömällä eri tavalla. Kaikki ne johtavat samaan tulo-lähtökäyttäytymiseen; tietenkin, eihän systeemiä muuteta mihinkään tilamuuttujien valinnoilla. Käsillä olevassa tehtävässä tilamuuttujien valinta toisin kuin edellä voi tosin olla haastavaa, sillä differentiaaliyhtälön oikealla puolella oleva derivaatta on ongelmallinen. Tilaesityksessä yhtälöiden oikealla puolella ei saa esiintyä derivaattoja.

3.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_1^2(t)\sin\left(u(t)\right) + 8x_2(t) \\ x_1(t)x_2(t) + \cos\left(u(t)\right) + 1 \end{bmatrix} \\ y(t) = \left[-x_1^2(t) + x_2(t)\right] \end{cases}$$

Kun systeemi on saavuttanut tasapainotilan, tilasuureiden arvot eivät muutu, ts. tilojen derivaatat ovat nollia. Koska tilaesityksen tilamatriisin rivit ovat tilojen derivaatat, löytyy tasapainotila yksinkertaisesti etsimällä näiden derivaattojen nollakohdat.

Etsitään tilojen tasapainopiste, kun ohjauksen $u(t)$ tasapainopiste on $u_s \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\begin{cases} x_{1s}^2 \sin\left(u_s\right) + 8x_{2s} = 0 \\ x_{1s}x_{2s} + \cos\left(u_s\right) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{2s} = -\dfrac{x_{1s}^2 \sin u_s}{8} \\ x_{1s}x_{2s} + \cos\left(u_s\right) + 1 = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan ensimmäinen yhtälö jälkimmäiseen.

$$-\frac{x_{1s}^3 \sin\left(u_s\right)}{8} + \cos\left(u_s\right) + 1 = 0$$

Ratkaistaan tilojen tasapainoarvot.

$$x_{1s} = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{\cos(u_s)+1}{\sin(u_s)}}$$

$$x_{2s} = -\frac{\left(\frac{\cos(u_s)+1}{\sin(u_s)}\right)^{\frac{2}{3}}\sin(u_s)}{2} \Rightarrow \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} 2\cdot\sqrt[3]{\frac{\cos(u_s)+1}{\sin(u_s)}} \\ -\frac{\left(\frac{\cos(u_s)+1}{\sin(u_s)}\right)^{\frac{2}{3}}\sin(u_s)}{2} \end{bmatrix}$$

Lähtösuureen tasapainotilan arvo on:

$$y(t) = \left[-x_1^2(t) + x_2(t)\right]$$

$$y_S = -4\cdot\left(\frac{\cos(u_S)+1}{\sin(u_S)}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{\left(\frac{\cos(u_S)+1}{\sin(u_S)}\right)^{\frac{2}{3}}\sin(u_S)}{2}$$

$$= -\left(\frac{\cos(u_s)+1}{\sin(u_s)}\right)^{\frac{2}{3}}\left(4+\frac{\sin(u_s)}{2}\right)$$

b. Tasapainotilaan linearisoitu tilaesitys:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{x}_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial\dot{x}_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_s) \\ \frac{\partial\dot{x}_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial\dot{x}_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{x}_1}{\partial u}(u_s) \\ \frac{\partial\dot{x}_2}{\partial u}(u_s) \end{bmatrix}\Delta u \\ \Delta y = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial y}{\partial x_2}(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} \end{cases}$$

Osittaisderivoidaan tilayhtälöt:

$$\begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2x_{1S}\sin(u_S) & 8 \\ x_{2S} & x_{1S} \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} x_{1S}^2\cos(u_S) \\ -\sin(u_S) \end{bmatrix}\Delta u \\ \Delta y = \begin{bmatrix} -2x_{1S} & 1 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} \end{cases}$$

Sijoitetaan edelleen tasapainotilat paikalleen.

$$
\begin{cases}
\Delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\cos(u_S)+1}{\sin(u_S)}}\sin(u_S) & 8 \\ -\dfrac{\left(\dfrac{\cos(u_S)+1}{\sin(u_S)}\right)^{\frac{2}{3}}\sin(u_S)}{2} & 2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\cos(u_S)+1}{\sin(u_S)}} \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4\left(\dfrac{\cos(u_S)+1}{\sin(u_S)}\right)^{\frac{2}{3}}\cos(u_S) \\ -\sin(u_S) \end{bmatrix}\Delta u \\
\Delta y = \begin{bmatrix} -4\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\cos(u_S)+1}{\sin(u_S)}} & 1 \end{bmatrix}\Delta\mathbf{x}
\end{cases}
$$

Erikseen voit vielä johtaa linearisoidun esityksen, kun $u_s = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4.

a. Valitaan tilamuuttujat $x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}$ (aika-argumentit jätetty merkitsemättä). Saadaan suoraan

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin\,(x_1)
\end{cases}
$$

joka on vaadittu epälineaarinen tilaesitys. Lähtömuuttujaa ei ole määritelty, mutta se voi olla esim. $y = x_1$ eli kappaleen kulma vertikaalitasoon nähden.

b. Tasapainopiste on $x_{1s} = x_{2s} = 0$. Tuolloin kappale riippuu levossa pystysuorassa olevan langan päässä. Tilayhtälön oikean puolen termit ovat nollia eli tilat pysyvät vakioina.

Merkitään $\Delta x_1 = x_1 - x_{1s} = x_1, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_{2s} = x_2$.

Lasketaan epälineaarisen tilayhtälön oikean puolen funktioiden osittaisderivaatat (kummallakin rivillä muuttujien x_1 ja x_2 suhteen) ja sijoitetaan tasapainopisteet. Saadaan

$$
\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l}\cos\,(x_1)_s & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}
$$

eli tässä tapauksessa myös absoluuttiarvoina

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

c. Käyttämällä annettua approksimaatiota ja a-kohdan tilamuuttujia saadaan suoraan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

eli sama tulos.

5. * *RLC*-piirien mallitus tapahtuu sähkötekniikan peruskaavojen (Kirchhoff I & II…) avulla. Tässä tehtävässä tarvittavia komponentteja kuvaavat yhtälöt ovat:

vastus

$$U = RI$$

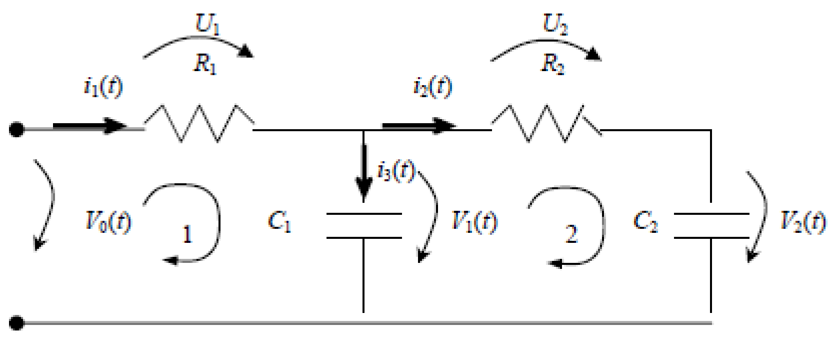
kondensaattori

$$I = C\frac{dU}{dt}$$

Tarkoituksena on johtaa differentiaaliyhtälö, josta nähdään ohjauksen ja lähtösuureen välinen riippuvuus. Tehtävän tapauksessa vastauksen tulisi olla kutakuinkin muotoa:

$$V_2^{(n)}(t) + a_1 V_2^{(n-1)}(t) + \cdots a_{n-1} V_2^{(1)}(t) + a_n V_2(t) = b_1 V_0^{(n-1)}(t) + \cdots b_{n-1} V_0^{(1)}(t) + b_n V_0(t)$$

Muodostetaan Kirchhoffien vaatimat silmukat ja virtamerkinnät:



Jätetään laskemisen (ja etenkin kirjoittamisen) helpottamiseksi aikariippuvuuden merkitseminen pois. Jännitteet vastusten yli:

$$U_1 = R_1 i_1 \text{ ja } U_2 = R_2 i_2$$

Virrat kondensaattoreiden ”läpi”:

$i_2 = C_2\dot{V}_2$ ja $i_3 = C_1\dot{V}_1$

Kirchhoffit:

$$i_1 = i_2 + i_3 = C_1\dot{V}_1 + C_2\dot{V}_2$$

Silmukka 1: Silmukka 2: $\begin{cases} V_0 = R_1 i_1 + V_1 \\ V_1 = R_2 i_2 + V_2 \end{cases}$

Sijoitetaan virrat paikalleen:

$$\begin{cases} V_0 = R_1(C_1\dot{V}_1 + C_2\dot{V}_2) + V_1 \\ V_1 = R_2 C_2 \dot{V}_2 + V_2 \end{cases}$$

Tehdään lopullinen differentiaaliyhtälö ylemmästä yhtälöstä hävittämällä siitä ”tarpeeton” V_1. Käytetään V_1:n hävittämiseen alempaa yhtälöä derivoimalla se kerran:

$$V_1 = R_2 C_2 \dot{V}_2 + V_2$$
$$\dot{V}_1 = R_2 C_2 \ddot{V}_2 + \dot{V}_2$$

Sijoitetaan nämä paikalleen:

$$V_0 = R_1(C_1\dot{V}_1 + C_2\dot{V}_2) + V_1$$
$$\Rightarrow V_0 = R_1\left[C_1\left(R_2C_2\ddot{V}_2 + \dot{V}_2\right) + C_2\dot{V}_2\right] + R_2C_2\dot{V}_2 + V_2$$
$$\Rightarrow V_0 = R_1C_1R_2C_2\ddot{V}_2 + R_1C_1\dot{V}_2 + R_1C_2\dot{V}_2 + R_2C_2\dot{V}_2 + V_2$$

Järjestetään yhtälö oikeaan järjestykseen, hävitetään V_2:n korkeimman derivaatan vakio ja lisätään aikariippuviin suureisiin aikaisemmin pois jätetty aikariippuvuuden merkintä:

$$\ddot{V}_2(t) + \frac{R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2}{R_1C_1R_2C_2}\dot{V}_2(t) + \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}V_2(t) = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2}V_0(t)$$

Tilaesitystä varten huomataan, että piirissä on kaksi energiaa varastoivaa elementtiä (kondensaattorit). Lähdetään siis etsimää kahta tilaa. Tämän voisi huomata myös siitä, että edellä johdettu differentiaaliyhtälö (tulo-lähtöesitys) on toista astetta.

Valitaan tilamuuttujiksi jännitteet kondensaattoreiden yli. Edellä esitetyistä yhtälöistä voidaan koota

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{C_1} i_3$$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{C_2} i_2$$

$$i_1 = \frac{V_0 - V_1}{R_1} = -\frac{1}{R_1} V_1 + \frac{1}{R_1} V_0$$

$$i_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{1}{R_2} V_1 - \frac{1}{R_2} V_2$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = -\frac{1}{R_1} V_1 + \frac{1}{R_1} V_0 - \frac{1}{R_2} V_1 + \frac{1}{R_2} V_2 = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_1 + \frac{1}{R_2} V_2 + \frac{1}{R_1} V_0$$

Tilayhtälöt ovat

$$\dot{V}_1 = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} V_1 + \frac{1}{R_2 C_1} V_2 + \frac{1}{R_1 C_1} V_0$$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{R_2 C_2} V_1 - \frac{1}{R_2 C2} V_2$$

Matriisimuodossa saadaan tilaesitys

$$\dot{V}(t) = \begin{bmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_0(t)$$

$$V_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} V(t) = V_2(t)$$

Havaitaan, että tilaesityksen muodostaminen oli jopa helpompaa kuin tulo-lähtökäyttäytymistä kuvaavan differentiaaliyhtälön. Myöhemmin opetettavilla tavoilla voitaisiin tilaesityksestä laskea suoraan siirtofunktio (Laplace-tasossa), josta tulo-lähtö-differentiaaliyhtälön muodostaminen olisi aivan suoraviivaista.