

ELEC-C1230 Säättötekniikka

Luku 4: Lohkokaaviomuunnokset, PID-säädin ja kompensointi

Luku 4: Lukuohje

- Lohkokaaviomuunnokset
- Suljetun järjestelmän siirtofunktio
- PID-säätimen perusteet
- Laskut Matlabilla
- Esimerkkejä

- Katso Matlabin komento *pidtune* P-, PI-, PD-, PID-säätimen virittämiseksi

Järjestelmien kokoaminen osasysteemeistä

- Edellisillä luennoilla on tarkasteltu yksittäisiä ilmiöitä ja niiden malleja (luento 2) ja näiden mallien ratkaisuja annetuilla herätteillä ja alkuarvoilla (luento 3).
- Ensimmäisellä luennolla esiteltiin yleisesti systeemien hallintajärjestelmiä lohkokaaavioiden avulla ja tällä luennolla yhdistetään mallit ja niiden ratkaiseminen lohkokaaavioiden – eli tarkastellaan yksittäisten osasysteemien käyttäytymisen sijasta ”laajojen” järjestelmien käyttäytymistä.
- Yksittäisten osasysteemien malleista päästään laajojen järjestelmien malleihin lohkokaaavioalgebran avulla – mutta ainoastaan lineaarisilla järjestelmillä. Epälineaarisilla systeemeillä järjestelmien analyysiin on käytettävissä muita menetelmiä, jotka ovat tämän kurssin aihepiirin ulkopuolella.

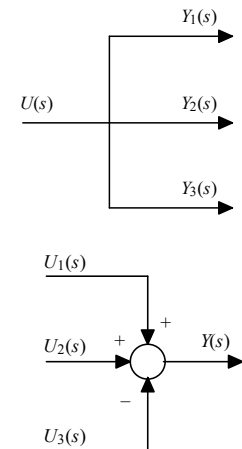
Lohkokaaviomuunnokset: Signaalit

- Lohkokaavioissa yksittäinen signaali voidaan viedä useaan eri lohkokon (signaalin haaraantuminen).
 - Lohkokaavio on informaatiokaavio ja informaatiota jaettaessa se ei vähene vaan monistuu. Jokaisessa haarassa kulkee sama informaatio.

$$Y_1(s) = Y_2(s) = Y_3(s) = U(s)$$

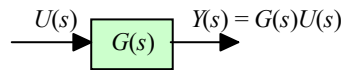
- Eri signaalit voidaan yhdistää summaelimen avulla. Summaelimestä voidaan signaalit laskea yhteen tai vähentää toisistaan.
 - Etumerkit summaelimestä signaalin kohdalla kertovat signaalin etumerkin summalausekkeessa.

$$Y(s) = U_1(s) + U_2(s) - U_3(s)$$

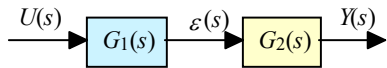


Signaalin kulkeminen lohkon läpi

- Kuten jo edellisellä luennolla todettiin, niin Laplace-tasossa lohkon lähtösignaali saadaan kertomalla tulosignaali lohkon siirtofunktiolla



- Tämän peruskaavan avulla voidaan johtaa muunnoskaava lohkojen sarjakytkennälle. Otetaan käyttöön apumuuttuja $\varepsilon(s)$, joka myöhemmin eliminoidaan

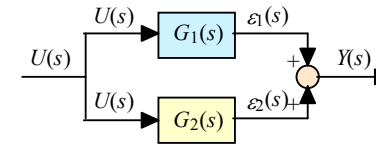


$$\begin{cases} Y(s) = G_2(s)\varepsilon(s) \\ \varepsilon(s) = G_1(s)U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) = G_{TOT}(s)U(s)$$

$$\Rightarrow G_{TOT}(s) = G_1(s)G_2(s) \Rightarrow \text{Block diagram with } G_1(s)G_2(s)$$

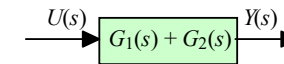
Signaalin kulkeminen lohkon läpi

- Johdetaan nyt muunnoskaava rinnankytkennälle



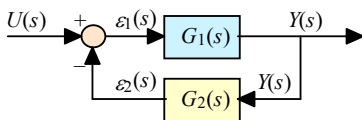
$$\begin{cases} Y(s) = \varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s) \\ \varepsilon_1(s) = G_1(s)U(s) \\ \varepsilon_2(s) = G_2(s)U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s)$$

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s) = G_{TOT}(s)U(s) \Rightarrow G_{TOT}(s) = G_1(s) + G_2(s)$$



Signaalin kulkeminen lohkon läpi

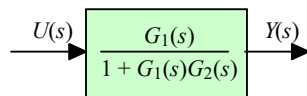
- Silmukkakytkennän muunnoskaavaksi saadaan



$$\begin{cases} Y(s) = G_1(s)\varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_1(s) = U(s) - \varepsilon_2(s) \\ \varepsilon_2(s) = G_2(s)Y(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)(U(s) - G_2(s)Y(s))$$

$$\Rightarrow Y(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s) \Rightarrow (1 + G_1(s)G_2(s))Y(s) = G_1(s)U(s)$$

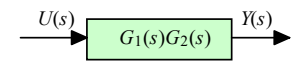
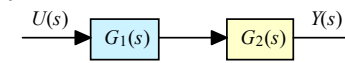
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}U(s) = G_{TOT}(s)U(s) \Rightarrow G_{TOT}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



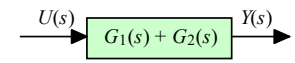
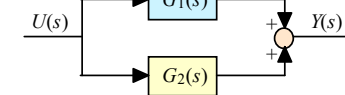
Lohkokaaviomuunnokset: Peruskytkennät

- Peruskytkentöjen lohkokaaviomuunnokset koottuna:

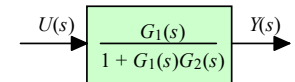
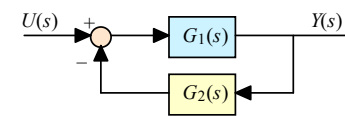
- Sarjaan



- Rinnan



- Silmukkaan



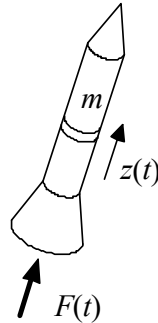
Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

- Rakettia, jonka massa $m = 10$ oletetaan muuttumattomaksi, ohjataan voimalla $F(t)$, joka voi olla positiivinen tai negatiivinen. Tavoitteena on saada raketin sijainti $z(t)$ (yksidimensioinen etäisyys) muuttumaan alkupisteestä (lepotila) loppupisteeseen (lepotila).
- Raketin sijaintia mitataan mittalaitteilla, joissa on jonkin verran hitautta, muttei biasta. Mittauksen siirtofunktio on

$$G_m(s) = \frac{Z_{mit}(s)}{Z(s)} = \frac{1}{\tau_m s + 1} = \frac{1}{0.1s + 1}$$

- Raketin mitattua sijaintia $z_{mit}(t)$ verrataan haluttuun sijaintiin $z_{ref}(t)$ (eli referenssiarvoon). Poikkeamaa halutun ja mitatun sijainnin välillä kutsutaan erosuureksi $e(t)$ ja sen perusteella säädin päättää kussakin tilanteessa sopivan ohjauksen arvon.

$$e(t) = z_{ref}(t) - z_{mit}(t)$$



Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

- Säätimessä on kaksi rinnakkaista toimintoa, joista ensimmäinen seuraa poikkeaman suuruutta (erosuuretta) ja kertoo sen vakiolla 30 ja toinen poikkeaman trendiä (eli erosuureen derivaattaa) ja kertoo sen vakiolla 31. Kokonaisohjaus eli tarvittava voima ($u(t) = F(t)$) lasketaan näiden kahden säätötoimenpiteen summana.

$$\begin{cases} u_{trendi}(t) = K_D \dot{e}(t) = 31 \dot{e}(t) \\ u_{poikkeama}(t) = K_P e(t) = 30 e(t) \end{cases}, \quad F(t) = u(t) = u_{poikkeama}(t) + u_{trendi}(t)$$

- Oletetaan, että toimilaitte on ideaalinen (eli säädin tuottaa suoraan tarvittavan voiman ilman hitautta), jolloin sitä ei tarvitse ottaa huomioon.
- Oletetaan, ettei rakettiin vaikuta mitään vaimentavia voimia (voimataseessa on ainoastaan massan hitaus ja työntövoima $F(t)$)
- Laaditaan yksityiskohtainen lohkoakaavio järjestelmälle ja analysoidaan sekä yksittäisten lohkojen että kokonaisjärjestelmän toimintaa vasteiden avulla.

Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

- Raketin lähtösuurena on etäisyys $\Rightarrow y(t) = z(t)$
- Raketin tulosuurena voima $\Rightarrow u(t) = F(t)$
- Mittarin lähtösuurena on mitattu etäisyys $\Rightarrow y_{mit}(t) = z_{mit}(t)$
- Mittarin tulosuurena todellinen etäisyys $\Rightarrow y(t) = z(t)$
- Säätimen tulosuurena on erosuure $e(t)$
- Säätimen lähtösuurena eli ohjauksena on voima $\Rightarrow u(t) = F(t)$
- Muodostetaan raketin dynaaminen malli:

$$F(t) = m\ddot{z}(t) \Rightarrow u(t) = 10\ddot{y}(t) \Rightarrow U(s) = 10s^2 Y(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{10s^2}$$

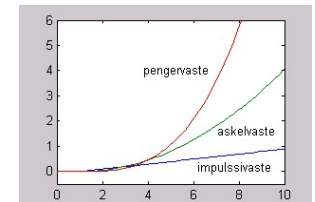
- Muodostetaan säätimen eri toiminnoille mallit

$$\begin{cases} u_{trendi}(t) = 31 \dot{e}(t) \\ u_{poikkeama}(t) = 30 e(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{trendi}(s) = 31sE(s) = G_{c1}(s)E(s) \\ U_{poikkeama}(s) = 30E(s) = G_{c2}(s)E(s) \end{cases}$$

Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

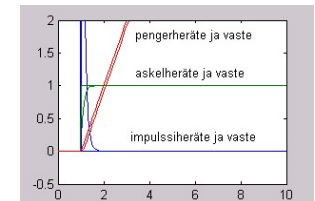
- Prosessi (raketti) on kaksoisintegraattori, jonka vasteet on helposti laskettavissa suoraan Laplace-taulukosta.

$$\begin{cases} \text{impulssivaste} & L^{-1}\{G(s) \cdot 1\} = \frac{1}{10} t \\ \text{askelvaste} & L^{-1}\{G(s) \cdot \frac{1}{s}\} = \frac{1}{20} t^2 \\ \text{pengervaste} & L^{-1}\{G(s) \cdot \frac{1}{s^2}\} = \frac{1}{60} t^3 \end{cases}$$



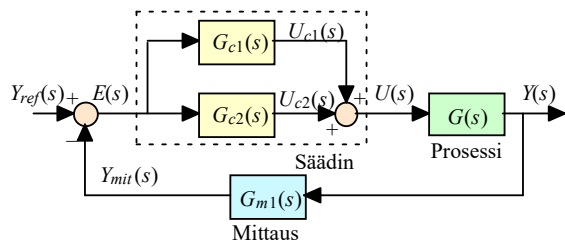
- Etäisyysmittari mittaa etäisyyden virheettömästi, mutta pienellä hitaudella

$$\begin{cases} \text{impulssivaste} & L^{-1}\{G_m(s) \cdot 1\} = 10e^{-10t} \\ \text{askelvaste} & L^{-1}\{G_m(s) \cdot \frac{1}{s}\} = 1 - e^{-10t} \\ \text{pengervaste} & L^{-1}\{G_m(s) \cdot \frac{1}{s^2}\} = t - \frac{1}{10}(1 - e^{-10t}) \end{cases}$$

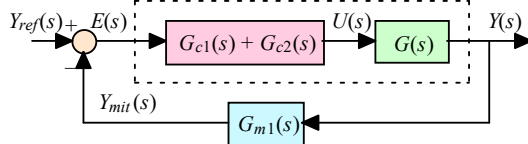


Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

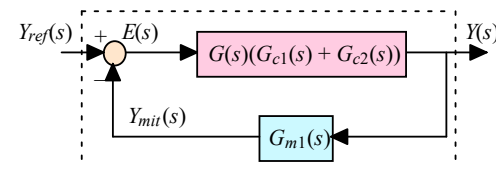
- Muodostetaan nyt koko säätetyn järjestelmän lohkokaavio



- Käytetään lohkokaaviomuunnoksia alkaen kaikkein sisimmästä rakenteesta



Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa



- Näin päädytään koko säätetyn järjestelmän siirtofunktion

$$Y_{ref}(s) \rightarrow \frac{G(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))}{1 + G(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))G_{m1}(s)} \rightarrow Y(s)$$

$$Y(s) = G_{tot}(s)Y_{ref}(s) = \frac{G(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))}{1 + G(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))G_{m1}(s)} Y_{ref}(s) = \frac{31s + 30}{1 + \frac{10s^2}{31s + 30}} Y_{ref}(s)$$

Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

$$G_{tot}(s) = \frac{(31s + 30)(0.1s + 1)}{10s^2(0.1s + 1) + 31s + 30} = \frac{31s^2 + 340s + 300}{10s^3 + 100s^2 + 310s + 300} = \frac{31s^2 + 340s + 300}{10(s + 2)(s + 3)(s + 5)}$$

- Nyt voidaan laskea säätetyn järjestelmän vaste askelmaiselle asetusarvon eli referenssin muukselle (hetkestä 0 alkaen tahdotaan raketin sijainnin olevan halutussa lopputilassa).

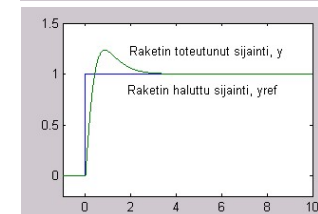
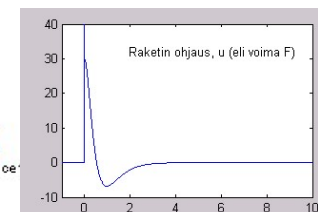
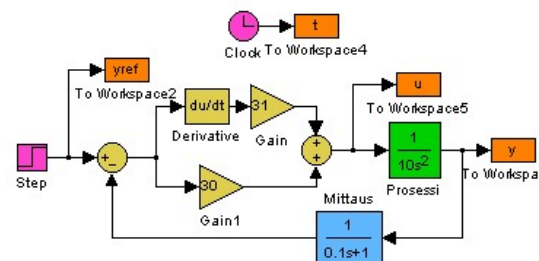
$$Y(s) = G_{tot}(s)Y_{ref}(s) = \frac{31s^2 + 340s + 300}{10(s + 2)(s + 3)(s + 5)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{64}{15} \frac{1}{s + 2} - \frac{147}{30} \frac{1}{s + 3} + \frac{25}{12} \frac{1}{s + 5}$$

$$\Rightarrow y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 1 + \frac{64}{15}e^{-2t} - \frac{147}{30}e^{-3t} + \frac{25}{12}e^{-5t}$$

- Järjestelmä toimii halutusti siinä mielessä, että se stabiloi epästabiilin raketin. Vasteen lausekkeesta nähdään sen raja-arvon olevan yksi ajan lähestyessä ääretöntä - eli etäisyyden haluttu arvo ja todellinen etäisyys lähestyvät toisiaan ajan kasvaessa.

Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

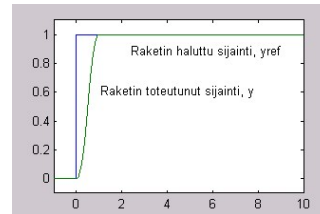
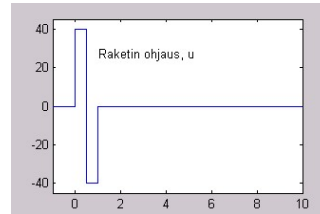
- Simuloidaan raketin hallintajärjestelmää



- Ohjauksessa on äärettömän korkea impulssi ja vasteessa on ylitys
 - Säätimen ehdottamaa ohjausta ei voida käytännössä toteuttaa ja raketin etäisyyden lähestyessä haluttua arvoa se menee ohi ja joutuu peruuttamaan (mittauksessa on hitautta).

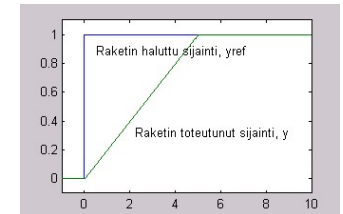
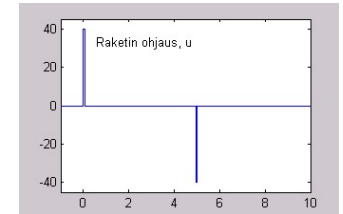
Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

- Raketeille voidaan kehittää myös realistisempi ja tehokkaampi hallintastrategia
 - Oletetaan, että ohjaus on rajoitettu maksimi- ja minimiarvojen välille: $u(t) \in [-40,40]$.
 - Jos raketti tahdotaan siirtää halutulle etäisyydelle minimiajassa, niin optimointiongelman ratkaisuna saadaan ns. "bang-bang"-säätö: maksimikiihdytys ja maksimijarrutus
- Optimisäätö on tämän opintojakson aihepiirin ulkopuolella - siihen palataan myöhemmillä opintojaksoilla.



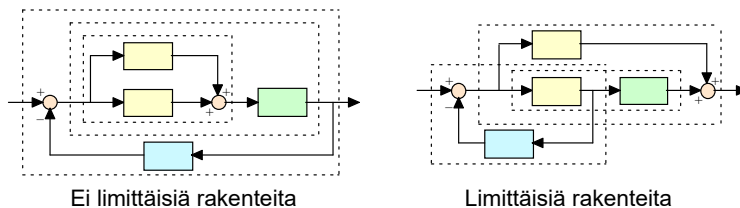
Esimerkki: Raketin siirtäminen avaruudessa

- Mikäli perille ei tarvitse päästä mahdollisimman nopeasti, niin voidaan optimoida esimerkiksi polttoaineen kulutusta (ohjauksen käyttöä)
 - Oletetaan, että ohjauksen pitkäaikainen käyttö on kallista - kaikkein taloudellisinta on nopea 0.05 aikayksikön pyrähdys maksimiteholla.
 - Raketin on oltava perillä vasta viiden aikayksikön kuluttua lähdöstä.
 - Tällöin optimointiongelman ratkaisuna saadaan: nopea kiihdytys - tasainen ajo - nopea jarrutus.



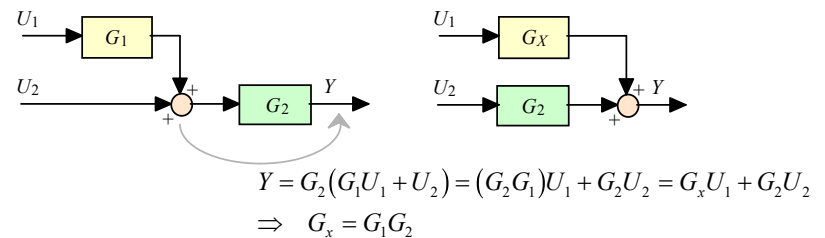
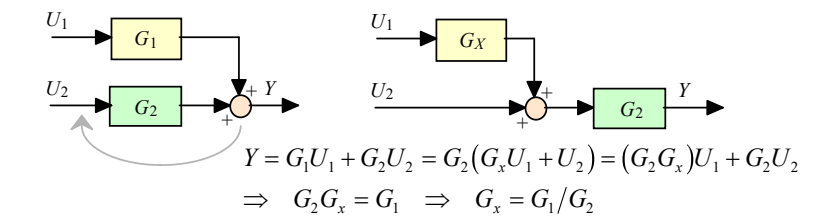
Limittäiset rakenteet

- Edellisessä esimerkissä havainnollistettu lohkojen yhdistäminen perusmuunnoskaavojen avulla alkaen kaikkein sisimmästä rakenteesta toimii ainoastaan silloin, kun järjestelmä koostuu puhtaasti sisäkkäisistä rakenteista.
- Jos järjestelmässä on limittäisiä rakenteita, niin lohko-kaaviomuunnokset voidaan ratkaista
 - algebraisesti - kuten perusmuunnoskaavoja johtaessa
 - tai eliminoimalla limittäiset rakenteet (siirtämällä summa- ja haaraantumispisteitä lohkojen yli) ja sitten käyttämällä perusmuunnoskaavoja.



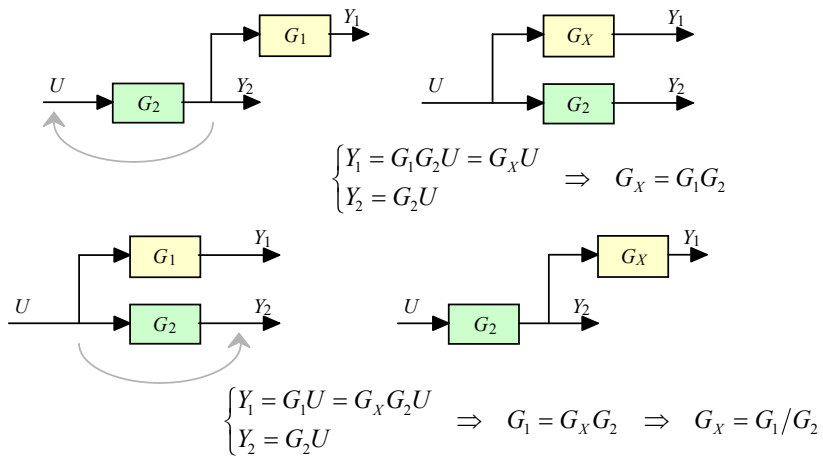
Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

- Summapisteen siirto "vastavirtaan" ja "myötävirtaan" - ratkaistaan G_x

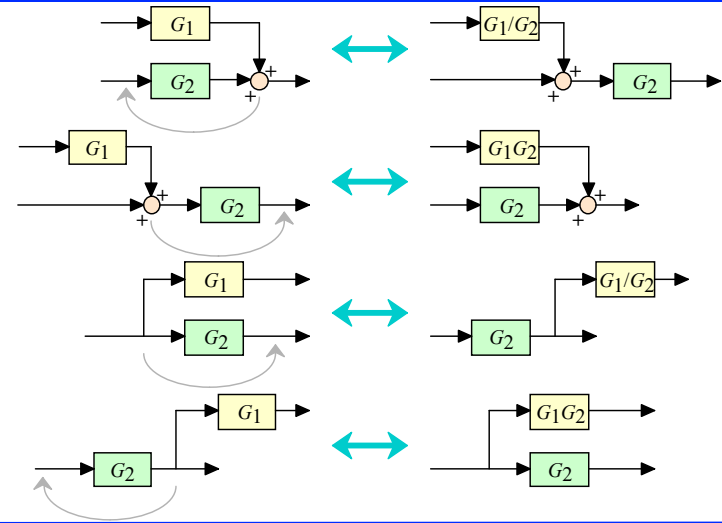


Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

- Haaraantumispisteen siirto "vastavirtaan" ja "myötävirtaan"

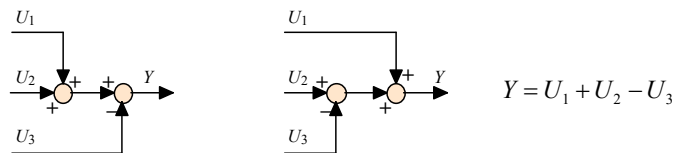


Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

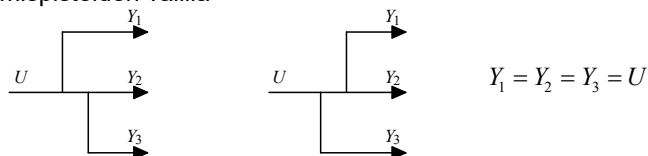


Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

- Summapisteiden järjestystä voidaan vaihtaa toisten summapisteiden välillä



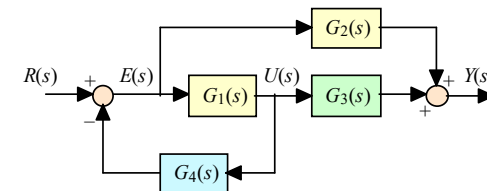
- Haaraantumispisteiden järjestystä voidaan vaihtaa toisten haaraantumispisteiden välillä



- Summapisteiden ja haaraantumispisteiden välistä järjestystä ei voida vaihtaa

Esimerkki: limittäiset rakenteet

- Ratkaistaan oheisen järjestelmän kokonaissiirtofunktio tulosignaaliin Y lähtösignaaliin R algebrallisesti

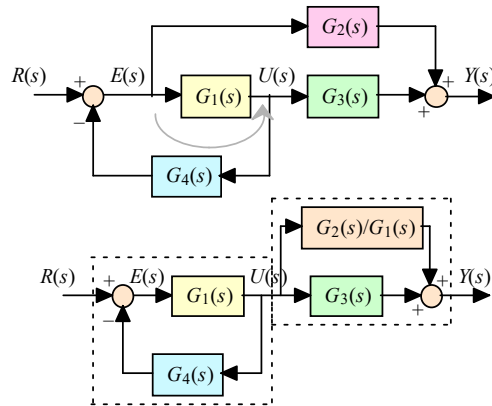


$$\begin{cases} Y = G_3 U + G_2 E \\ U = G_1 E \\ E = R - G_4 U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = G_1 G_3 E + G_2 E \\ E = R - G_1 G_4 E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = (G_1 G_3 + G_2) E \\ (1 + G_1 G_4) E = R \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{G_1 G_3 + G_2}{1 + G_1 G_4} R = G_{TOT} R$$

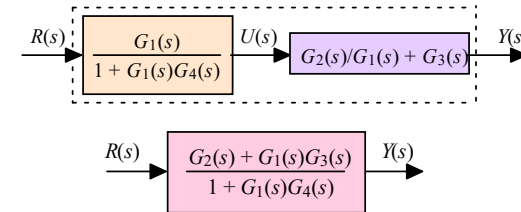
Esimerkki: limittäiset rakenteet

- Ratkaistaan oheisen järjestelmän kokonaissiirtofunktio tulosignaalista R lähtösignaaliin Y lohkokaaviomuunnoksilla
- Siirretään E :n haaraantumispiste U :n haaraantumispisteen luo (haaraantumispisteiden järjestys voidaan vaihtaa keskenään), jolloin päästään eroon limittäisistä rakenteista ja voidaan käyttää aikaisemmin johdettuja peruskäytöjen kaavoja.



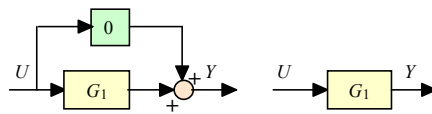
Esimerkki: limittäiset rakenteet

- Saadaan sama tulos kuin lohkokaavioalgebralla

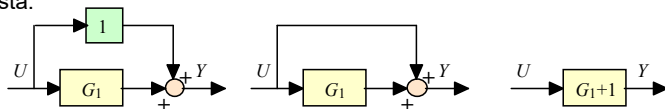


Nolla- ja ykköslohkot

- Kaksi erityistä vakiolohkoa on syytä mainita erikseen.
 - Mikäli lohkon siirtofunktio on nolla, niin kaikilla tulosuuren arvoilla lähtösuure on aina nolla. Tämä lohko kuvaa informaatiokatkosta - lohko, siihen tulevat ja siitä lähtevät signaalit voidaan jättää pois lohkokaaviosta.



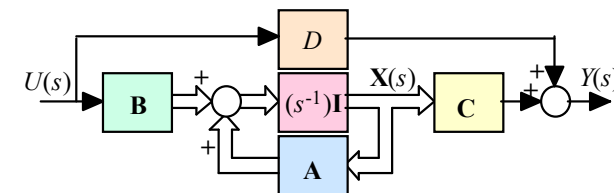
- Mikäli lohkon siirtofunktio on yksi, niin kaikilla tulosuuren arvoilla lähtösuure on aina sama kuin tulosuure ja kyseinen lohko voidaan jättää kaaviosta pois. Järjestelmien lohkokaaviossa on usein merkitty lohkot mittaukselle tai toimilaitteelle ja mikäli oletetaan ideaalinen mittaus tai toimilaitte, niin näiden lohkojen siirtofunktiot voidaan korvata ykkösellä - ja jättää kokonaan pois lohkokaaviosta.



Vektoriarvoiset signaalit lohkokaavioissa

- Lohkokaavioalgebra pätee yhtä lailla vektoriarvoisille signaaleille ja matriisilohkoille kuin edellä esitetyille skalaarisignaaleille ja -lohkoille. Vektoriarvoiset signaalit esitetään lohkokaavioissa tavallisesti paksuilla nuolilla
- Otetaan esimerkiksi SISO-järjestelmän tilaesitys (ohjaus ja lähtösuure ovat skalaareja, mutta tilasuure on vektoriarvoinen)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{X}(s) = s^{-1}\mathbf{I}(\mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)) \\ Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + DU(s) \end{cases}$$



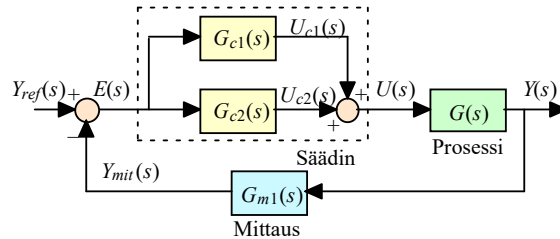
MATLAB: Lohkokaaviomuunnokset

- Lohkokaaviomuunnoksiin on Control System Toolboxissa komennot **parallel** (myös +/-), **series** (myös *) ja **feedback**
- Muodostetaan rakettiesimerkin säätöjärjestelmälle kokonaislohkokaavio MATLAB:in avulla

$$G_m(s) = \frac{1}{0.1s + 1}$$

$$G(s) = \frac{1}{10s^2}$$

$$\begin{cases} G_{c1}(s) = 31s \\ G_{c2}(s) = 30 \end{cases}$$



- `Gc1=tf([31 0],[1])` =>Transfer function: 31 s
- `Gc2=tf([30],[1])` =>Transfer function: 30
- `G=tf([1],[10 0 0])` =>Transfer function: 1/ (10 s^2)
- `Gm=tf([1],[0.1 1])` =>Transfer function: 1/(0.1 s + 1)

MATLAB: Lohkokaaviomuunnokset

- `Gc=parallel(Gc1,Gc2)` =>Transfer function: (31 s + 30)
- `Gff=series(Gc,G)` =>Transfer function: (31 s + 30) / (10 s^2)
- `Gtot=feedback(Gff,Gm)` =>Transfer function: $\frac{3.1 s^2 + 34 s + 30}{s^3 + 10 s^2 + 31 s + 30}$
- Komennot **parallel** ja **series** voidaan korvata +:lla ja *:lla (rinnakkain olevat lohkot lasketaan yhteen ja peräkkäin olevat kerrotaan keskenään)
 - `Gc=Gc1+Gc2`
 - `Gff=Gc*G`
 - `Gtot=feedback(Gff,Gm)`
- Koko lohkokaaviomuunnos voidaan toteuttaa myös yhdellä rivillä
 - `Gtot=feedback(G*(Gc1+Gc2),Gm)`

MATLAB: Lohkokaaviomuunnokset

- Symbolisesti kokonaislohkokaavio voidaan laskea Matlabilla myös määrittelemällä ensin $s = \text{tf('s')}$

ja sitten

- `Gc1=31*s`
- `Gc2=30`
- `G=1/(10*s^2)`
- `Gm=1/(0.1*s+1)`
- `Gtot=(Gc1+Gc2)*G/(1+(Gc1+Gc2)*G*Gm)`
- `Gtot=minreal(Gtot)` % minreal supistaa yhteiset termit

$$3.1 s^2 + 34 s + 30$$

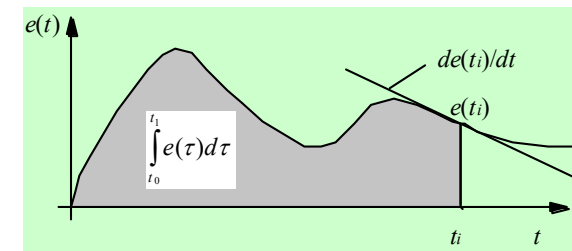
$$\frac{1}{10} \frac{(31 s + 30) (s + 10)}{(s + 5) (s + 3) (s + 2)}$$

$$s^3 + 10 s^2 + 31 s + 30$$

PID-säädin

- PID-säädin on kaikkein yleisin säädin teollisuudessa

$$\begin{cases} u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \\ u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} \end{cases} \begin{cases} K_I = \frac{K_p}{T_I} \\ K_D = K_p T_D \end{cases}$$



PID-säädin

- PID-säätimen tulona on erosuure $e(t)$ (poikkeama halutun ja mitatun suureen välillä, $y_{ref}(t) - y_{mit}(t)$) ja lähtönä prosessin ohjaus $u(t)$.
- Säätimen antama ohjaus on summa kolmesta eri toiminnosta, joiden keskinäiseen dominoivuuteen vaikutetaan viritysparametreilla K_p , K_I ja K_D

$$u(t) = u_p(t) + u_i(t) + u_d(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

- Suhdesäätötermi (P - proportional) on staattinen kuvaus erosuureesta ohjaukseen. Aina kun erosuure muuttuu, niin u_p muuttuu myös vakiosuhteessa erosuureen muutoksiin.
- Integroiva termi integroi erosuuretta. u_i on jatkuvassa muutostilassa, kunnes erosuure on kadonnut. Integroiva termi poistaa pysyvän poikkeaman, mutta saattaa lisätä järjestelmän värähtelyä.
- Derivoiva termi seuraa erosuureen muutosnopeutta. Aina kun erosuure on muutostilassa, niin u_d reagoi riittäen vastustaa muutosta. Derivoiva termi stabiloi järjestelmää, mutta on herkkä viiveille ja korkeataajuiselle kohinalle.

PID-säädin - integroiva termi

$$u_i(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

- Integroivan termin kykyä poistaa pysyvä poikkeama voidaan havainnollistaa esittämällä se derivoituna muodossa.

$$\frac{du_i(t)}{dt} = K_I e(t)$$

- Nähdään, että ohjaus $u(t)$ jatkaa muuttumistaan kunnes poikkeama $e(t)$ menee nolleen.

PID-säätimen siirtofunktio

$$U(s) = G_{PID}(s)E(s), \quad G_{PID}(s) = K_p + K_I \frac{1}{s} + K_D s = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

- PID-säätimestä saadaan kaikki perusmodifikaatiot sijoittamalla ei-haluttujen termien kertoimiksi nolla. Raketin säätöesimerkissä säätimenä oli PD-säädin. Samalla periaatteella voidaan myös muodostaa esim. PI²D-säädin.
- P-säädin, K_p on säätimen vahvistus $G_p(s) = K_p$
- PI-säädin, K_p on säätimen vahvistus tai suhdesäädön vahvistus, K_I on integrointivahvistus ja T_I on integrointi-aika.

$$G_{PI}(s) = K_p + K_I \frac{1}{s} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

- PD-säädin, K_p on säätimen vahvistus tai suhdesäädön vahvistus, K_D on derivoituvahvistus ja T_D on derivointi-aika.

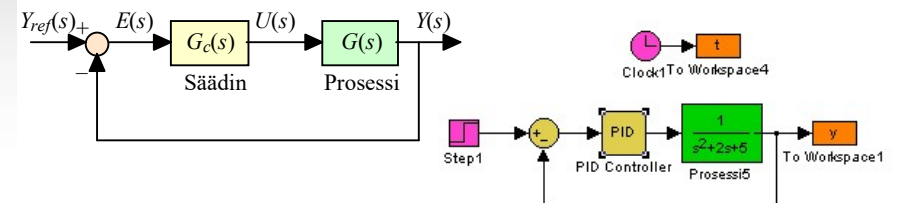
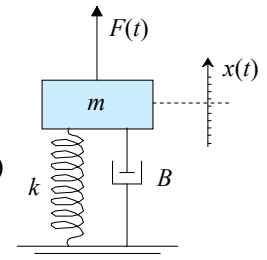
$$G_{PD}(s) = K_p + K_D s = K_p (1 + T_D s)$$

Esimerkki 2: mekaaninen järjestelmä

- Simuloidaan mekaanisen systeemin massakappaleen sijaintia, kun sitä säädetään erilaisilla PID-säätimen modifikaatioilla. Oletetaan mittauksen ja toimilaitteen olevan ideaalisia.

$$m\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (k = 5, B = 2, m = 1)$$

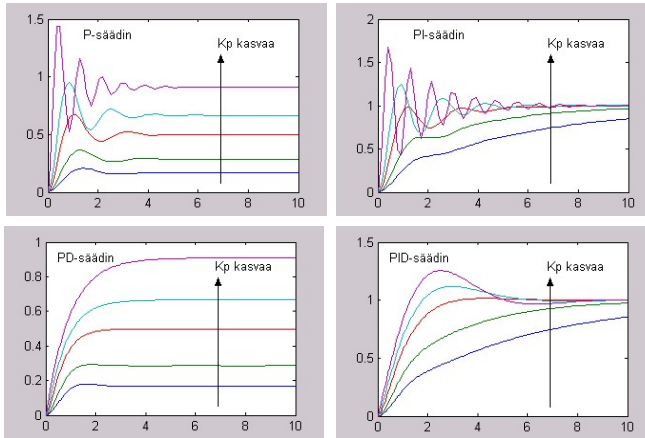
$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$



Esimerkki 2: mekaaninen järjestelmä

- Oheisissa kuvissa on P-, PI-, PD- ja PID-säätimien säätötulokset

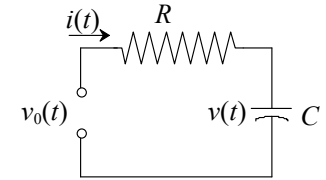
- Simuloinneissa käytettiin säätimen vahvistuksen K_p :n arvoja 1, 2, 5, 10 ja 50. Integrointi- ja derivointiajat olivat simuloinneissa 1.
- P- ja PD-säätimillä jää pysyvä poikkeama, I-termi poistaa pysyvän poikkeaman
- I-termi lisää värähtelyä kun taas D-termi stabiloi ja poistaa värähtelyjä



Esimerkki: Sähköpiiri

- Valitaan esimerkkiprosessiksi yksinkertainen RC-piiri

- RC-piirin ohjauksena on syöttöjännite $v_0(t)$ ja lähtösuureena kondensaattorin jännite $v(t)$.
- Tavoitteena on $v_0(t)$:aa manipuloimalla saada $v(t)$ käyttäytymään halutulla tavalla ja seuraamaan referenssitrajektoria $v_{ref}(t)$ - jota ei tunneta etukäteen ja joka voi muuttua mielivaltaisesti satunnaisilla ajanhelkillä.



Esimerkki: RC-piirin malli

- RC-piirille kehitetään systeemiä kuvaava differentiaaliyhtälö

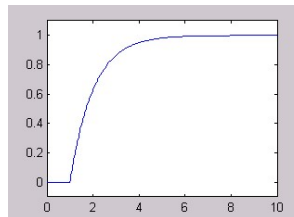
$$v_0(t) = Ri(t) + v(t), \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow RC \frac{dv(t)}{dt} = v_0(t) - v(t)$$

- Kehitetään siirtofunktio Laplace-muunnoksen avulla

$$RC\dot{y}(t) = u(t) - y(t) \Rightarrow RCsY(s) = U(s) - Y(s) \Rightarrow (RCs + 1)Y(s) = U(s) \\ \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

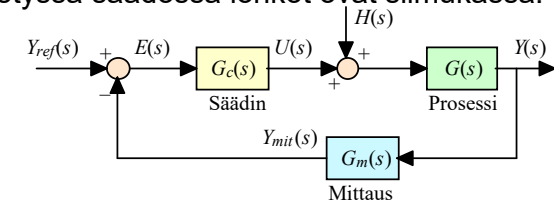
- Merkitään $RC = \tau$ (aikavakio).
- Avoimen RC-piirin vaste askelmaiselle syöttöjännitteen muutokselle on

$$Y(s) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{1}{s} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(\tau s + 1)s} \right\} = 1 - e^{-t/\tau}$$



Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

- Takaisinkytketyssä säädössä lohkot ovat silmukassa.



- Oletetaan aluksi, ettei häiriötä ole $H(s) = 0$ ja että mittaus on ideaalinen $G_m(s) = 1$.

$$Y(s) = G(s)G_c(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$$

- Jos tehtävänä olisi kehittää säädin, jolla saataisiin täydellinen referenssin seuranta ($Y(s) = Y_{ref}(s)$), niin

$$Y(s) = G(s)G_c(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)) = G(s)G_c(s)(Y(s) - Y(s)) = 0$$

Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

- Selvästikään täydellistä referenssisuureen seuranta ei takaisinkytketyllä säätimellä voida tehdä (ainoastaan silloin kun referenssi on nolla) – eikä täydellistä seuranta säädöllä yleensä tavoitellakaan.
- Esimerkijärjestelmän vasteiden laskenta symbolisesti kaikille mahdollisille takaisinkytketyille säätimille alkaa olla työlästä, joten tarkastellaan vain yhtä erikoistapausta, jossa säätimenä on PI-säädin ja parametreille pätee:

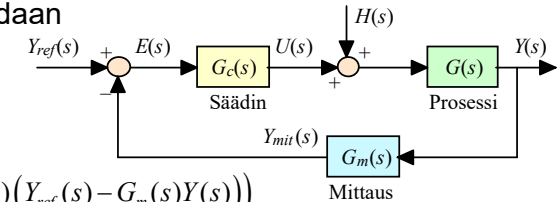
$$G_c(s) = G_{PI}(s) = K_p + K_I \frac{1}{s} = 10 + 10 \frac{1}{s} = \frac{10(s+1)}{s}$$

$$\tau_m = 0.1, \quad K_m = 1.1, \quad \tau = 1$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{s+1}, \quad G_m(s) = \frac{1.1}{0.1s+1}$$

Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

- Järjestelmälle saadaan



$$Y(s) = G(s) \left(H(s) + G_c(s) (Y_{ref}(s) - G_m(s)Y(s)) \right)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)G_m(s)} Y_{ref}(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)G_c(s)G_m(s)} H(s)$$

- Sijoitetaan parametriarvot

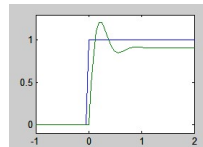
$$Y(s) = \frac{s+10}{0.1s^2 + s + 11} Y_{ref}(s) + \frac{0.1s^2 + s}{(s+1)(0.1s^2 + s + 11)} H(s)$$

Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

- Askelmaisille asetusravon muutoksille $Y_{ref}(s) = 1/s$

$$y(t) = \frac{10}{11} - \frac{10}{11} e^{-5t} \cos(\sqrt{85}t) + \frac{12}{187} e^{-5t} \sin(\sqrt{85}t)$$

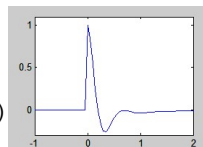
- Mittausvirheestä (10%) seuraa pysyvä poikkeama (10%)



- Impulssimaisille häiriöille $H(s) = 1$

$$y(t) = -\frac{9}{101} e^{-t} + \frac{88}{1717} e^{-5t} \sqrt{85} \sin(\sqrt{85}t) + \frac{110}{101} e^{-5t} \cos(\sqrt{85}t)$$

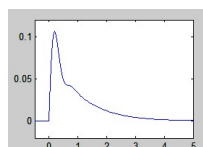
- Häiriöt poistuvat tehokkaasti (tehokkaammin kuin avoimella ohj.)



- Askelmaisille häiriöille $H(s) = 1/s$

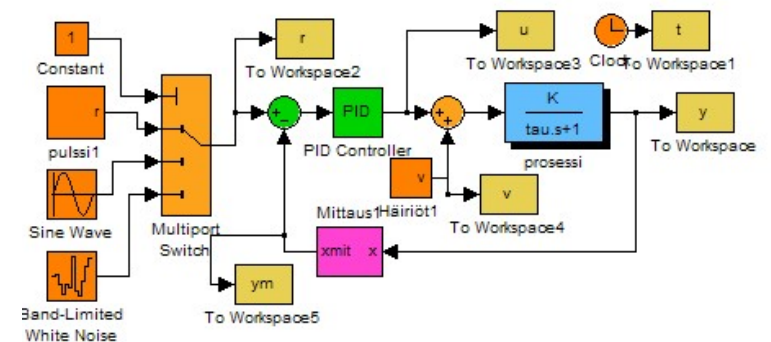
$$y(t) = \frac{9}{101} e^{-t} + \frac{13}{1717} e^{-5t} \sqrt{85} \sin(\sqrt{85}t) - \frac{9}{101} e^{-5t} \cos(\sqrt{85}t)$$

- Askelmaisen häiriön vaikutus lähtösuureeseen häviää nopeasti



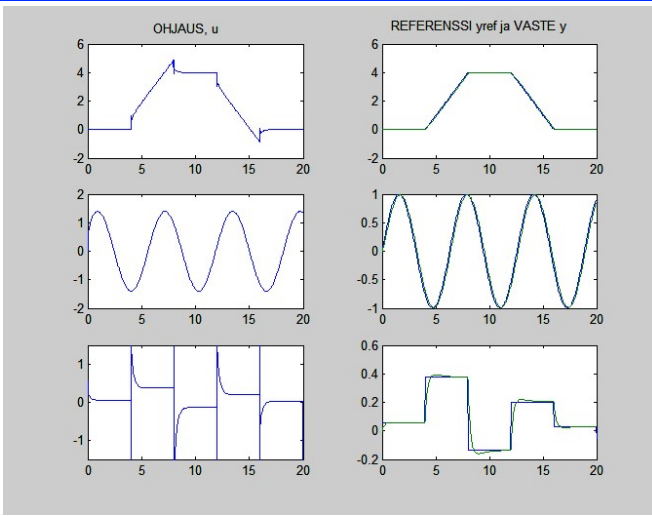
Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

- Säätimenä käytettiin PID-säädintä ($K_p = 10$, $K_I = 10$ ja $K_D = 1$). Koska säätimen suunnittelussa ei käytetty tarkkaa mallitietoa, niin mallinnusvirheitä ei tarkasteltu simuloinnissa.



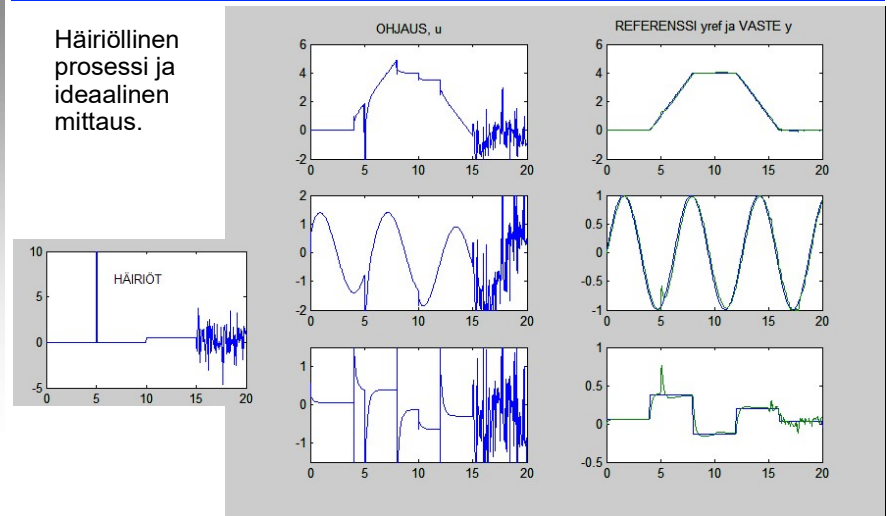
Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

Täysin häiriötön prosessi ja ideaalinen mittaus.



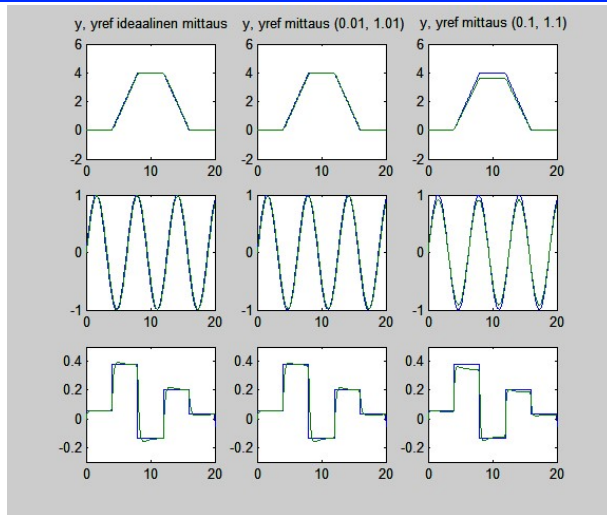
Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

Häiriöllinen prosessi ja ideaalinen mittaus.



Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

Täysin häiriötön prosessi ja epäideaalinen mittaus. Sarakkeessa vasemmalla ideaalinen mittaus, keskellä aikavakio on 0.01 ja vinouma 1%, oikealla aikavakio on 0.1 ja vinouma 10%.



Esimerkki: RC-piirin takaisinkytketty säätö

Häiriöllinen prosessi ja hitaatta sekä häiriöiden että lähtösuureen mittauksessa (aikavakio 0.1). Avoimen ohjauksen malli pieessä 10% sekä vahvistuksen että aikavakion suhteen Kompensaattorin suunnittelussa oletettu (virheellisesti) mittauksen olevan ideaalinen.

