Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

ELEC-C1110 Automaatio- ja systeemitekniikan perusteet

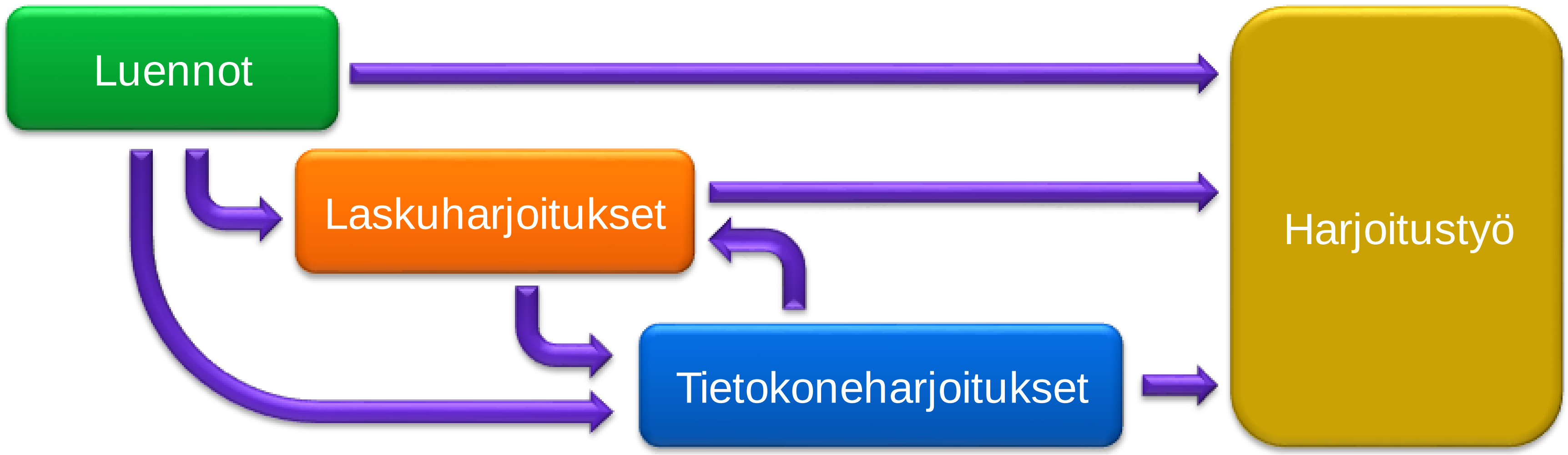
Luento 2

Fysikaalisen systeemin mallintaminen

Joni Pajarinen, 22.1.2024

Tämä luento

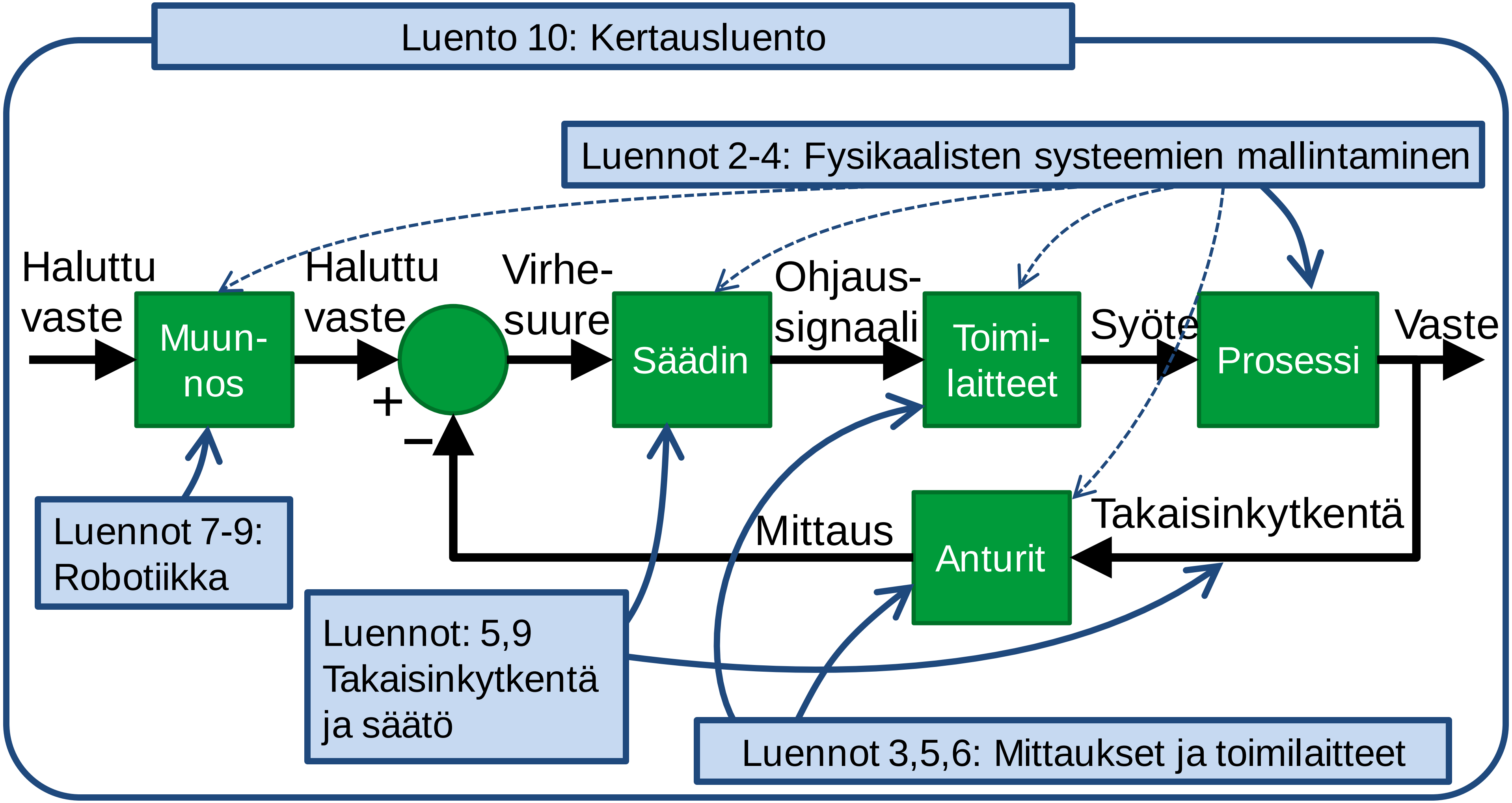
- Dynaaminen mallintaminen
  - lähtien differentiaaliyhtälöistä…
  - …päätyen differentiaaliyhtälöiden numeeriseen integrointiin



Tämän luennon aiheet

- Systeemin mallintaminen
- Differentiaaliyhtälöt
- Numeerinen integrointi

Viitekehys tämän kurssin asioille



Dynaamisen systeemin mallintaminen

- Systeemi reagoi syötteeseen vasteella
- Jos on olemassa ajasta riippumaton funktio $y = f(u)$, jolla voidaan kuvata ohjauksen vaikutus mittaukseen, ei tarvita dynaamista tarkastelua
- Muussa tapauksessa järjestelmässä dynamiikkaa (hitautta, viivettä, tms.) ja järjestelmässä on mukana aikariippuvuus
- Dynaamisuus (ajan mukana muuttuva luonne) aiheuttaa haasteen prosessien säätämiselle

Järjestelmien mallintaminen

1. Määrittele järjestelmä ja sen komponentit
2. Muodosta matemaattinen malli ja tarvittavat oletukset lähtien perussäännöistä (esim. fysiikka)
3. Muodosta yhtälö, joka edustaa matemaattista mallia
4. Ratkaise yhtälöt ulostulomuuttujan suhteen
5. Analysoi ratkaisu ja oletukset
6. Jos tarpeen, tarkenna järjestelmän mallia ja toista vaiheet

Vaihtoehtona black-box mallinnus (Luento 4)

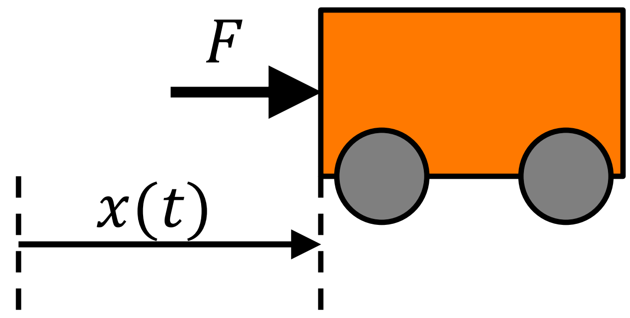
Differentiaaliyhtälöt

- Aikariippuvaa (dynaamista) järjestelmää kuvaavat yhtälöt tyypillisesti differentiaaliyhtälöitä
- Differentiaaliyhtälöt sisältävät muuttujien derivaattoja
- Esim. $\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 0$
- Pistenotaatio: $\dot{y}(t) + y(t) = 0$
- Ratkaisu on funktio tai funktiojoukko
- Tässä tapauksessa $y(t) = k\,e^{-t}$

$F = ma$

- Newtonin 2. laki $F = ma$ voidaan ymmärtää differentiaaliyhtälönä
- Jos aluksi levossa olevaan kappaleeseen vaikuttaa vakiovoima, missä se on jatkossa?

  Oletetaan:
  - ei kitkaa
  - ei ilmanvastustusta
  - nopeus voi kasvaa rajatta



$F = ma$

$$F = ma$$

$$a = \frac{F}{m} \Bigg| \; a = \dot{v}$$

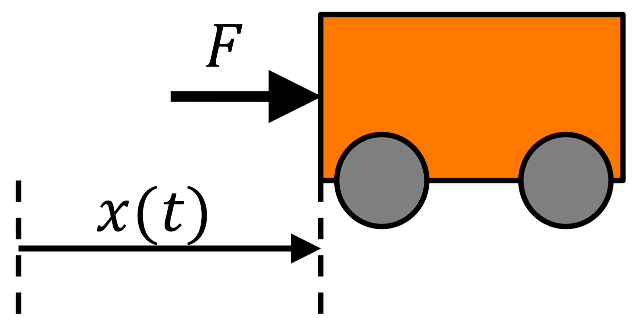
$$\dot{v} = \frac{F}{m} \Bigg| \int$$

$$v = \int_0^t \frac{F}{m} dt = \frac{F}{m} \int_0^t dt = \frac{Ft}{m} \Bigg| \; v = \dot{x}$$

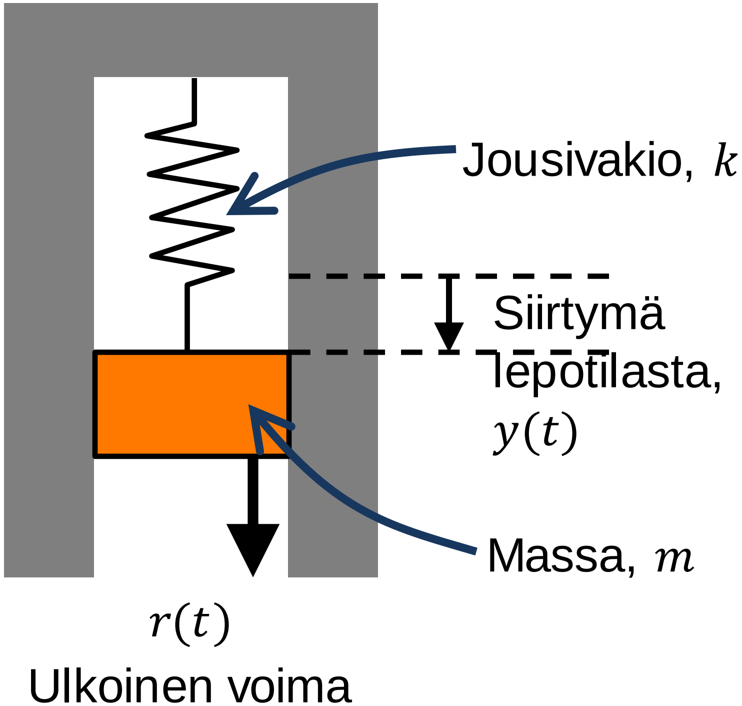
$$\dot{x} = \frac{Ft}{m} \Bigg| \int$$

$$x = \int_0^t \frac{Ft}{m} dt = \frac{F}{m} \int_0^t t dt = \frac{Ft^2}{2m}$$

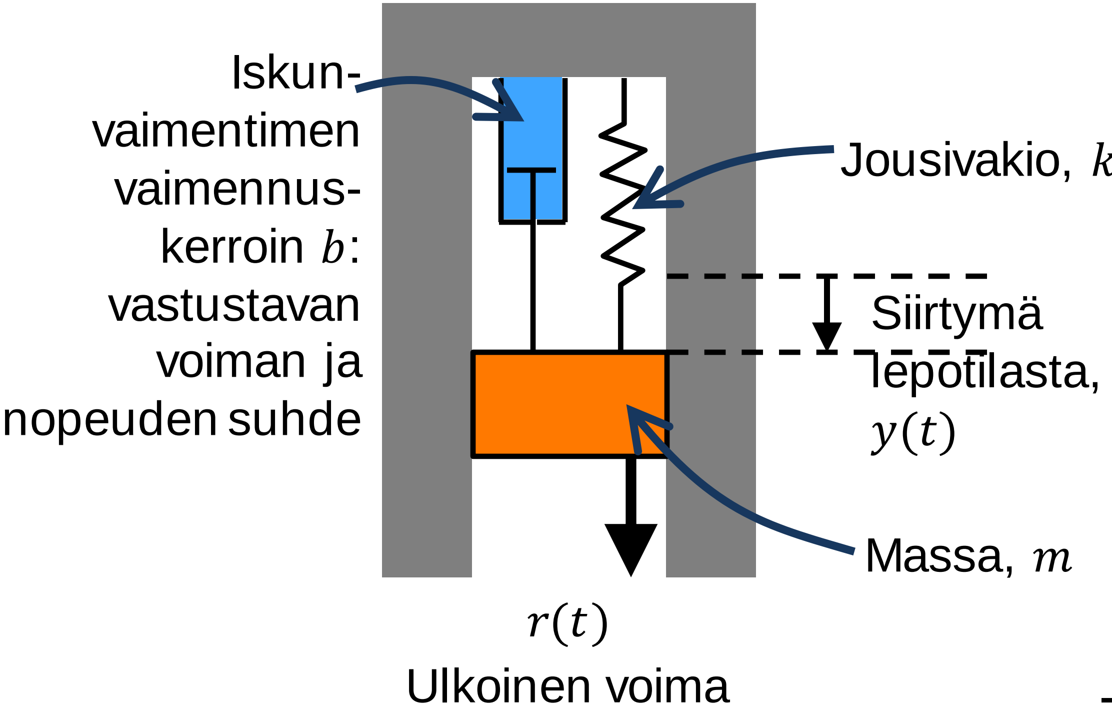
$$x(t) = \frac{F}{2m} t^2$$

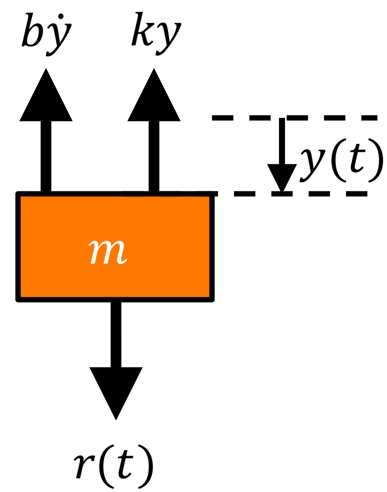


Jousi-massa-vaimennin -järjestelmä



Jousi-massa-vaimennin -järjestelmä

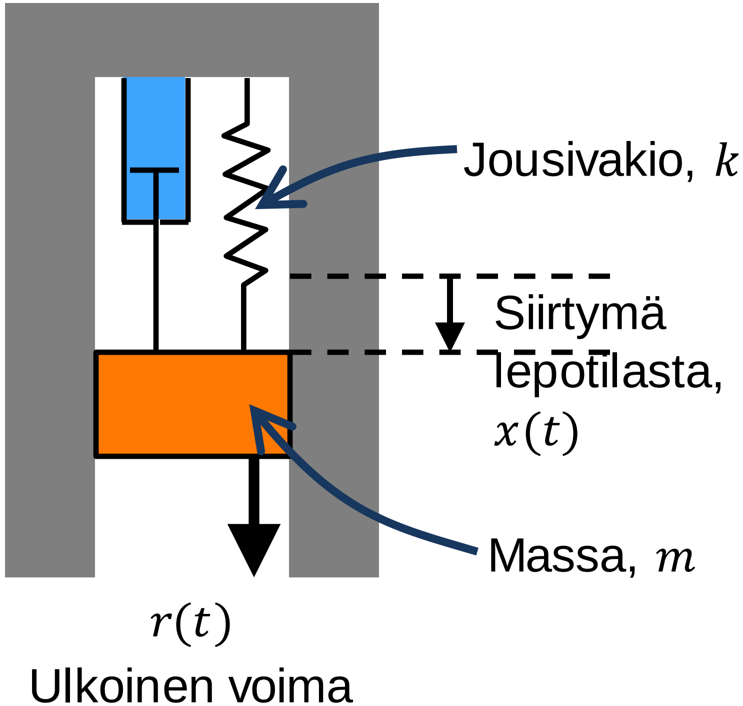


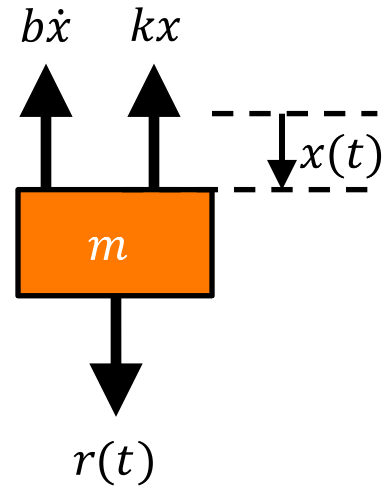


$$F = ma$$
$$-b\dot{y} - ky + r(t) = m\ddot{y}$$
$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = r(t)$$

Toisen kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö (ODE)

Jousi-massa-vaimennin -järjestelmä





$$F = ma$$
$$-b\dot{x} - kx + r = m\ddot{x}$$
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = r$$

Toisen kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö

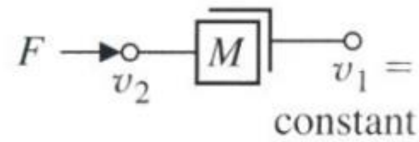
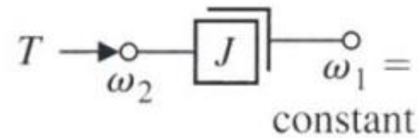
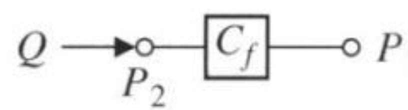
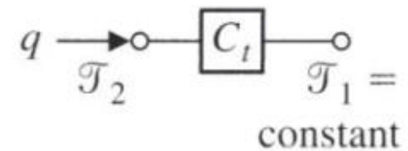
Differentiaaliyhtälömallit

- Monet fysikaaliset järjestelmät voidaan esittää differentiaaliyhtälöinä
  - Mekaaniset järjestelmät
  - Sähköiset järjestelmät
  - Virtausprosessit
  - Termodynaamiset järjestelmät

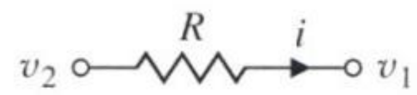
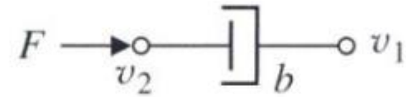
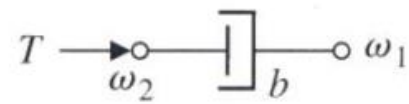
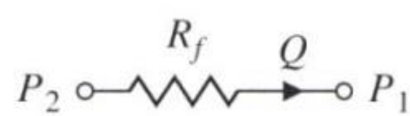
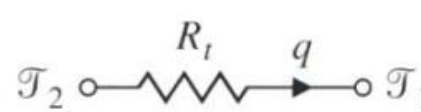
Differentiaaliyhtälömallit: toisiaan vastaavia fysikaalisia ilmiöitä 1

Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power $\mathscr{P}$	Symbol
Electrical inductance	$v_{21} = L\frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	
Translational spring	$v_{21} = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$	
Rotational spring	$\omega_{21} = \frac{1}{k}\frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$	
Fluid inertia	$P_{21} = I\frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2}IQ^2$	

Differentiaaliyhtälömallit: toisiaan vastaavia fysikaalisia ilmiöitä 2

Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power $\mathcal{P}$	Symbol
Electrical capacitance	$i = C\dfrac{dv_{21}}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Cv_{21}{}^2$	
Translational mass	$F = M\dfrac{dv_2}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Mv_2{}^2$	
Rotational mass	$T = J\dfrac{d\omega_2}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}J\omega_2{}^2$	
Fluid capacitance	$Q = C_f\dfrac{dP_{21}}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}C_fP_{21}{}^2$	
Thermal capacitance	$q = C_t\dfrac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t\mathcal{T}_2$	

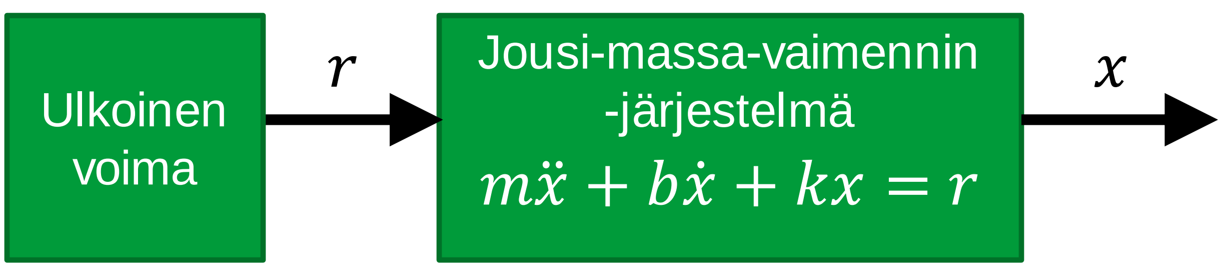
Differentiaaliyhtälömallit: toisiaan vastaavia fysikaalisia ilmiöitä 3

Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power $\mathcal{P}$	Symbol
Electrical resistance	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} {v_{21}}^2$	
Translational damper	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b {v_{21}}^2$	
Rotational damper	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b {\omega_{21}}^2$	
Fluid resistance	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} {P_{21}}^2$	
Thermal resistance	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	

Lohkokaavioesitys

- Systeemin vuorovaikutusten visualisointi
- Esim. vakiovoima-kärry

- Jousi-massa-vaimennin:

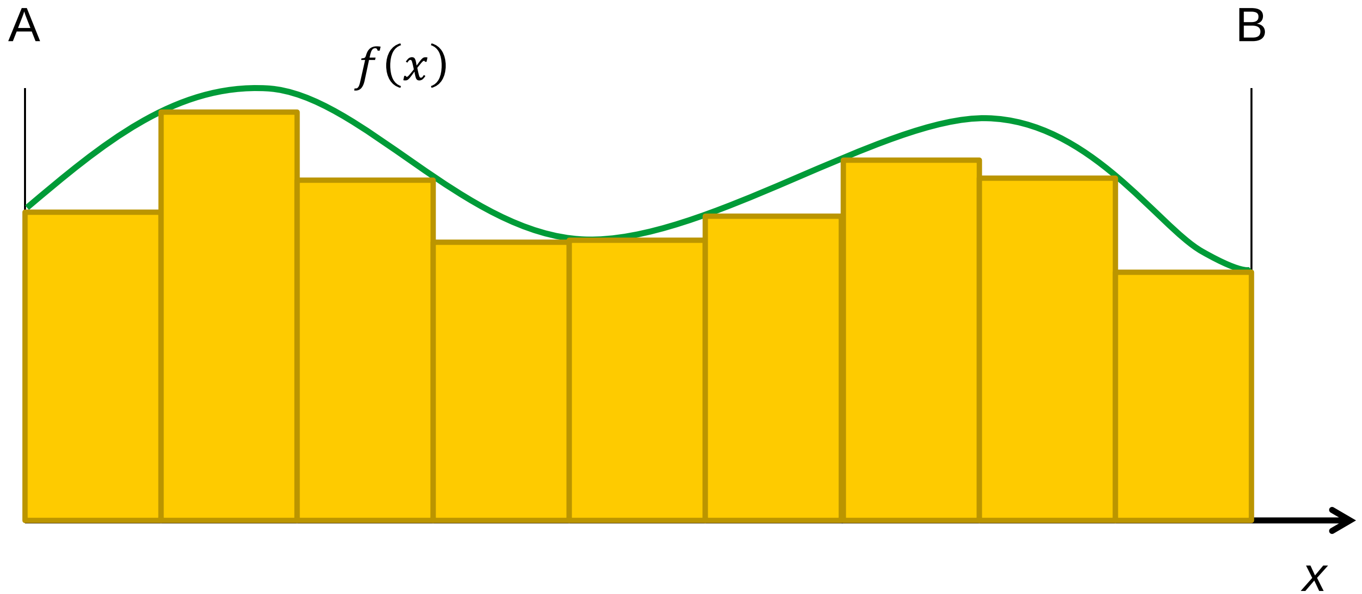


Numeerinen integrointi

Tavallisen differentiaaliyhtälön ratkaisu numeerisesti

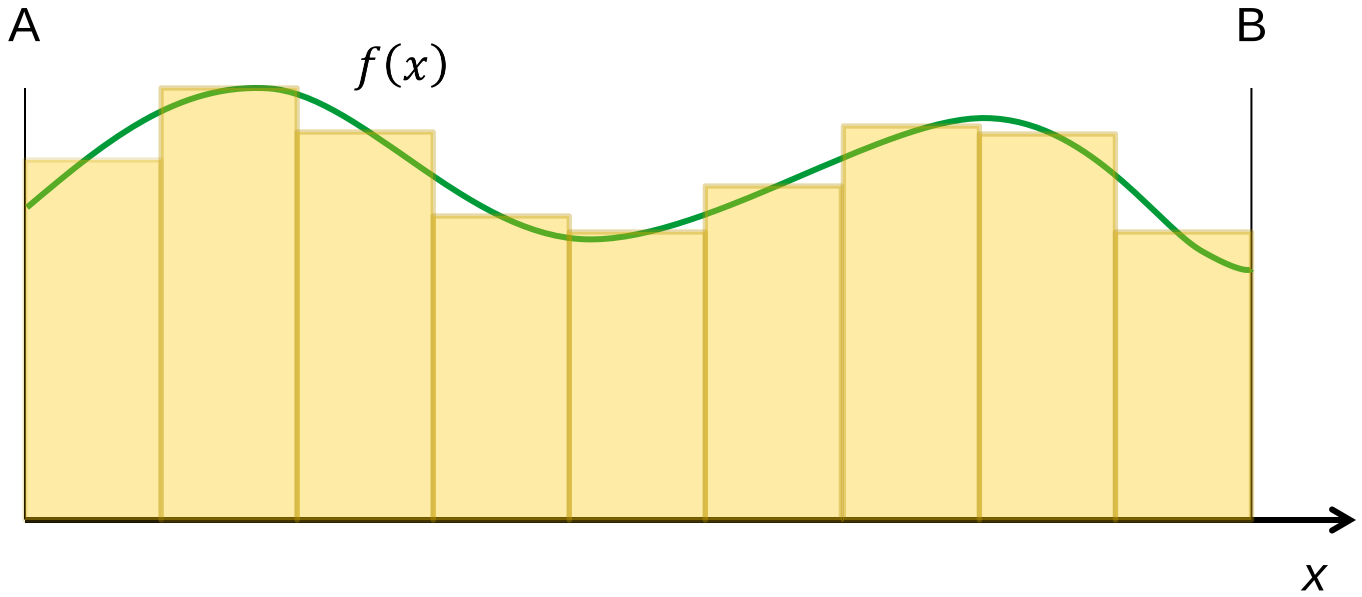
Numeerinen integrointi

$$\int_A^B f(x)dx \approx \sum \min_{x_1 \le x \le x_2} f(x)(x_2 - x_1)$$



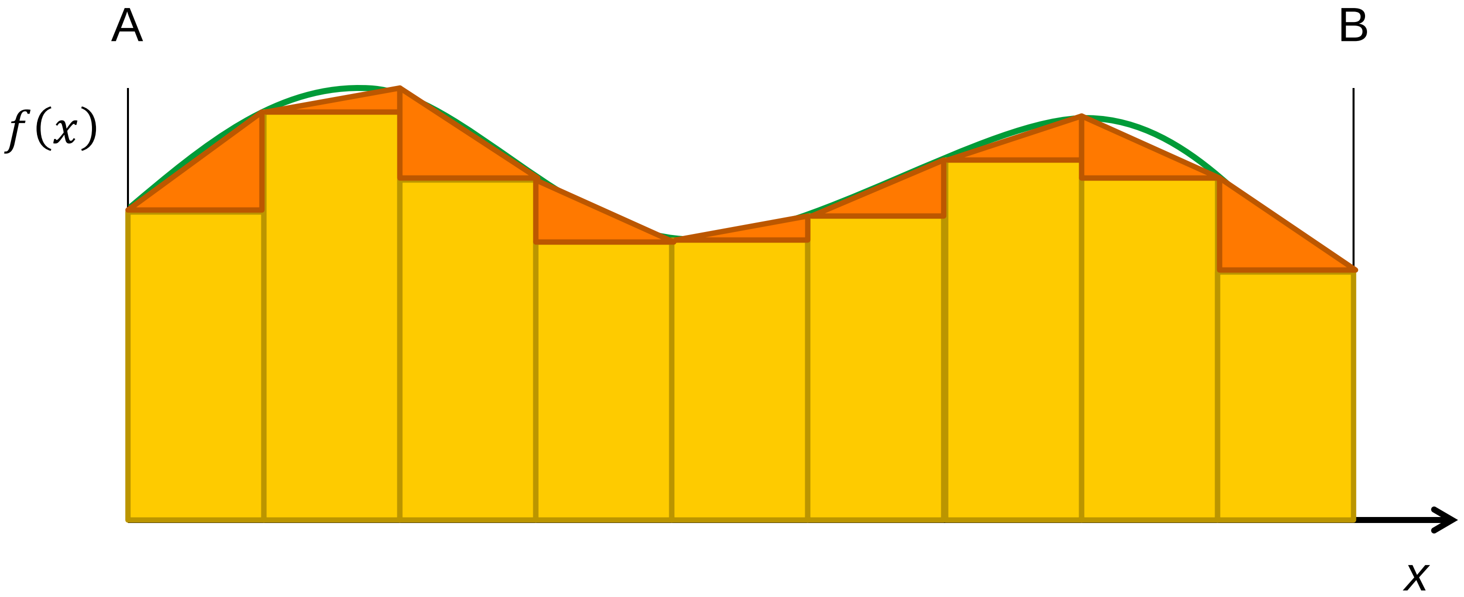
Numeerinen integrointi

$$\int_A^B f(x)dx \approx \sum_A^B f\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)(x_2 - x_1)$$



Numeerinen integrointi

$$\int_{A}^{B} f(x)dx \approx \sum_{A}^{B} \left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right) (x_2 - x_1)$$

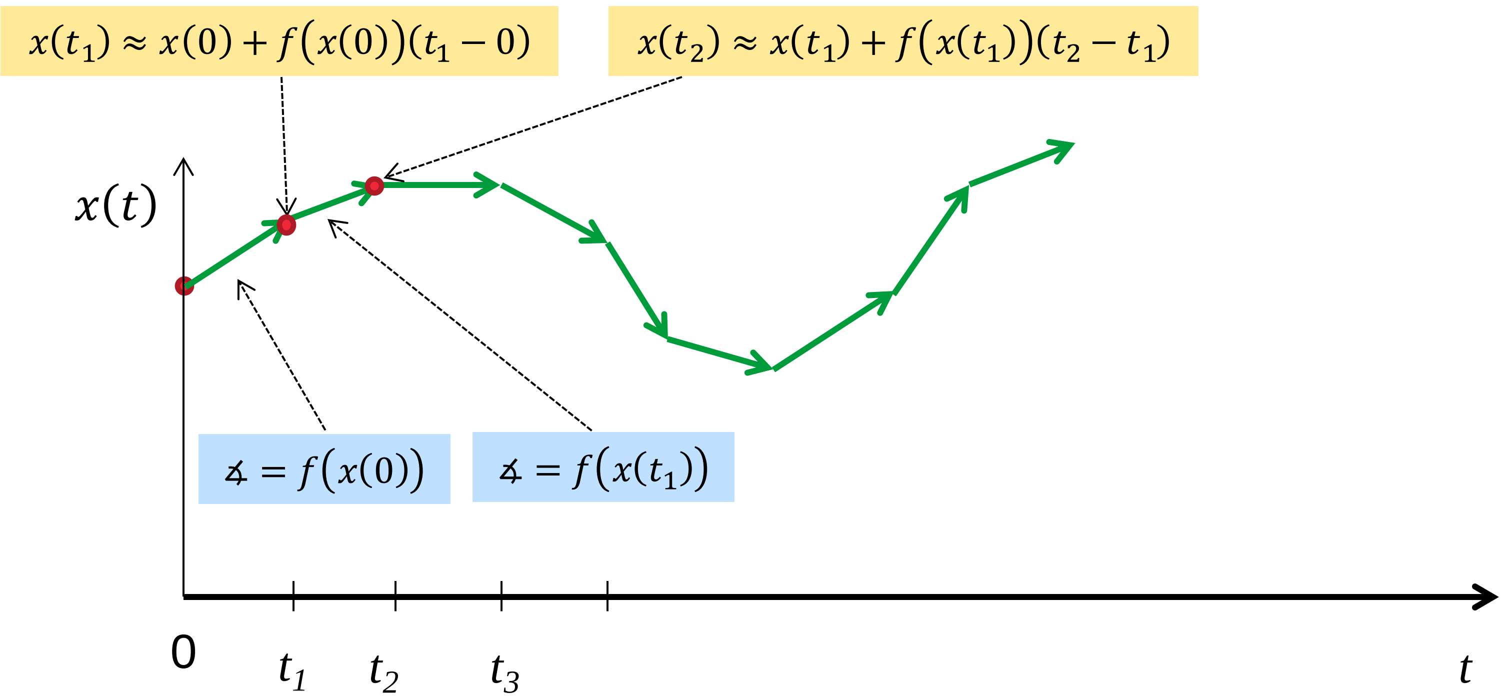


Trapetsoidimenetelmä

Numeerinen integrointi (ODE)

esim. $\dot{x}(t) = 9x(t) + 4 + \sin t$

yl. $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$



Tavallisen differentiaaliyhtälön ratkaisu numeerisesti: Eulerin menetelmä.
Voidaan käyttää tarkempia menetelmiä, esim. Runge-Kutta menetelmää.

Toisen asteen numeerinen integrointi (ODE)

esim. $\ddot{x}(t) = 3\dot{x}(t) + 9x(t) + 4 + \sin t$

yl. $\ddot{x}(t) = f(\dot{x}(t), x(t), t)$

Miten voidaan integroida?
Käytetään kahta muuttujaa $x(t)$ ja $x_2(t) = \dot{x}(t)$ yhden sijaan:
$\dot{x}(t) = x_2(t)$
$\dot{x}_2(t) = f(x_2(t), x(t), t) = 3x_2(t) + 9x(t) + 4 + \sin t$

Eulerin menetelmälle saadaan päivitykset:

$x(t_1) \approx x(0) + x_2(0)(t_1 - 0)$

$x_2(t_1) \approx x_2(0) + f(x_2(0), x(0), 0)(t_1 - 0)$

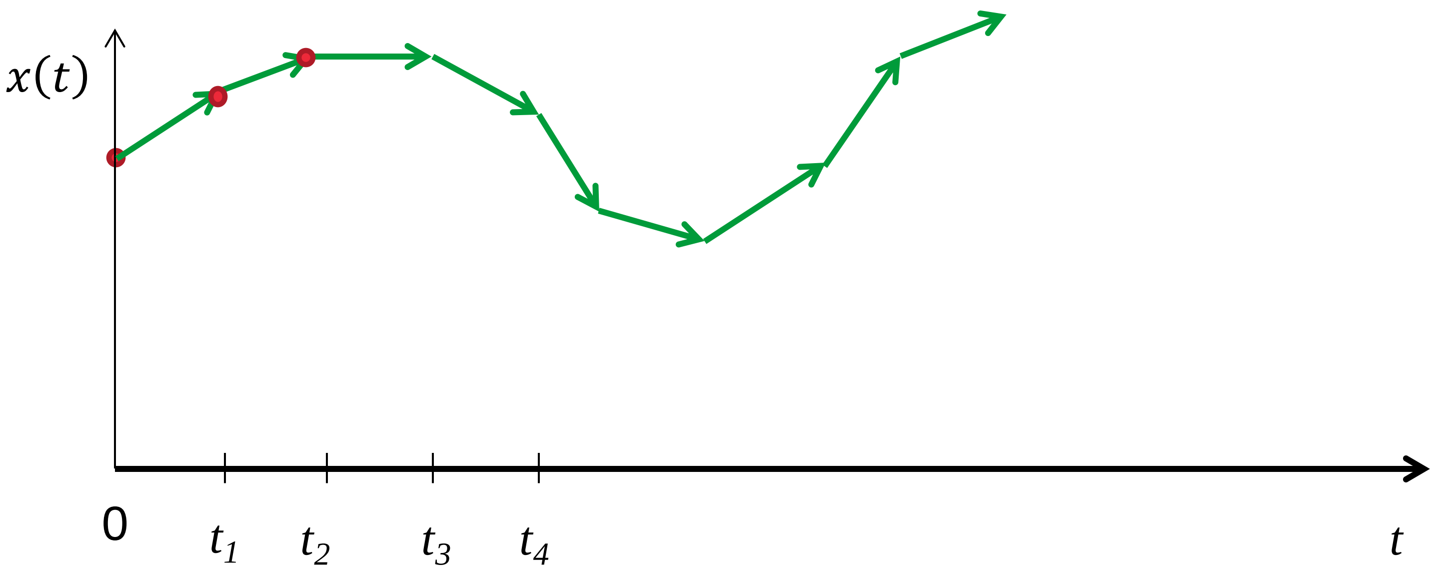
$x(t_2) \approx x(t_1) + x_2(t_1)(t_2 - t_1)$

$x_2(t_2) \approx x_2(t_1) + f(x_2(t_1), x(t), t_1)(t_2 - t_1)$

→ toisen asteen integrointi muistuttaa ensimmäisen asteen integrointia, mutta käytetään lisämuuttujaa ensimmäisen asteen derivaatalle

Numeerinen integrointi (ODE)

- Jos $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3$ jne.
  kyseessä on **vakio-askelpituinen** integrointi (**fixed step**)



Numeerinen integrointi (ODE)

- Vakio-askelpituisen vaihtoehtona on **muuttuva-askelpituinen** integrointi (**variable step**)
- Periaate:
  - kun funktiossa ”loivia osioita”, voidaan loikkia pidempiä askeleita ilman suurta virhettä
  - kun ”nopeita ilmiöitä”, integroidaan lyhyin askelein
  - vrt. formularata ja ohjauksen tarkkuus
- Muuttuva-askelpituinen integrointi on yleensä nopeampaa ja tuottaa hyvän tarkkuuden
  - mikäli pitkä simulaatio ja monimutkainen malli, tietokoneelta vaadittava laskenta-aika merkitsee

Numeerinen integrointi (ODE)

- Numeerinen ODE integrointi Pythonilla
  - Voidaan käyttää olemassa olevia ohjelmakirjastoja
    - Esim. scipy.integrate.solve_ivp
  - Tai tehdään luuppi missä lasketaan integraatio jokaisella ajanhetkellä manuaalisesti tai käyttäen valmista funktiota
- Mahdollista toteuttaa
  - vakio-askelpituuden integrointimenetelmiä (fixed step)
  - muuttuva-askelpituuden integr. menetelmiä (variable step)
- Fixed step
  - monissa yksinkertaisissa tapauksissa ok
  - jos simulaatiossa on sekä hyvin hitaita ja hyvin nopeita yhtä aikaa, on tarpeen miettiä tarkkaan mikä menetelmä toimii

Yhteenveto

- Systeemin mallintaminen differentiaaliyhtälöillä
- Numeerinen integrointi

Ensi kerralla

- Erilaiset anturit näytteiden mittaamiseen
- Mallin kalibrointi näytteistä