Hemtal 3

① Låt $f(x,y) = x^3 e^y$ Använd linjär approximation för att beräkna $f(3.05, -0.02)$.

Lösning: Vi beräknar

$$f(3{,}05, -0{,}02) \approx f(3,0) + f_x(3,0)\,0{,}05 + f_y(3,0)(-0{,}02)$$

Vi beräknar

$$f_x = 3x^2 e^y \quad \text{och} \quad f_y = x^3 e^y$$

Vi får $f(3,0) = 3^3 e^0 = 27$, $f_x(3,0) = 3 \cdot 3^2 e^0 = 27$
och $f_y(3,0) = 3^3 e^0 = 27$

Därför $f(3{,}05, -0{,}02) \approx 27 + 27 \cdot 0{,}05 - 27 \cdot 0{,}02$
$= 27 \cdot 1{,}03 = \frac{2781}{100}$

② Låt $f(x,y) = x^2 - y^2$. I vilken riktning $\vec{u}$ är $D_{\vec{u}} f(1,0) = -1$? Finns det någon riktning $\vec{u}$ så att $D_{\vec{u}} f(1,0) = -3$?

Lösning: Vi vet att $D_{\vec{u}}f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\vec{u}$

Vi har $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y, x)$ och därför

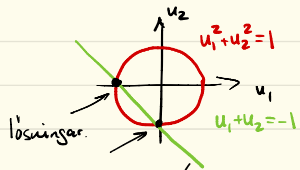
$$\nabla f(1,1) = (1,1)$$

Detta ger

$$D_{\vec{u}}f(1,1) = (1,1)\cdot(u_1,u_2) = u_1 + u_2$$

Alltså $D_{\vec{u}}f(1,1) = -1$ om $u_1 + u_2 = -1$

Kom ihåg att $\|\vec{u}\| = 1$. Man ser att $(u_1,u_2) = (-1,0)$ och $(u_1,u_2) = (0,-1)$ funkar. Man inser också att detta är de enda lösningar som finns.



Det finns två riktningar $(\vec{u} = (-1,0)$ & $\vec{u} = (0,-1))$ så att $D_{\vec{u}}f(1,1) = -1$.

Eftersom $|D_{\vec{u}}f(1,1)| \leq \|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ så finns ingen riktning så att $D_{\vec{u}}f(1,1) = -3$.

③ Låt $f(x,y) = x^4 + xy + y^3$

Beräkna riktningsderivatan för f i punkten $(1,2)$ i den riktning som bildar vinkeln $45°$ med x-axeln

Lösning: Vi vill beräkna $D_{\vec{u}} f(1,2)$ där $\vec{u} = (\cos 45°, \sin 45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Vi vet att $D_{\vec{u}} f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \vec{u}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(4x^3 + y,\ x + 3y^2\right)$$

$$\nabla f(1,2) = \left(4 \cdot 1^3 + 2,\ 1 + 3 \cdot 2^2\right) = (6, 13)$$

Därför $D_{\vec{u}} f(1,2) = (6,13) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$$= 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 13\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{19\sqrt{2}}{2}$$

Inlämningsuppgift 3

(1) Definiera $f(x,y) = \sqrt{\frac{1+x}{1-y}}$.

Använd linjär approximation för att få en approximativ formel för $f(x,y)$ då $|x|$ och $|y|$ är små.

Lösning: $f(x,y) \approx f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y$

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{1+x}{1-y}} = (1+x)^{1/2}(1-y)^{-1/2}$$

$$f_x = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}(1-y)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(1+x)(1-y)}}$$

$$f_y = +\frac{1}{2}(1+x)^{1/2}(1-y)^{-3/2} = \frac{1}{2(1-y)}\sqrt{\frac{1+x}{1-y}}$$

$$f(0,0) = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \qquad f_x(0,0) = \frac{1}{2}$$

$$f_y(0,0) = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{1-y}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$ då $|x|$ och $|y|$ är små.

(2) Låt $a>0$ och $b>0$. De punkter som uppfyller

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ bildar en hyperbel.

Beräkna en formel i x och y för tangentlinjernas lutning för hyperbeln.

Lösning: $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2}{b^2}y$$

Alltså existerar $y(x)$ så att $F(x,y(x))=1$ då $y\neq 0$. Då $y=0$ så är tangentlinjen parallell med y-axeln. Tangentens lutning i dessa punkterna är "$\pm\infty$" (alltså inte definierad)

Då $y\neq 0$ gäller

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y(x)^2}{b^2}=1$$

Implicit derivering ger

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y(x)y'(x)}{b^2}=0$$

Lös ut $y'(x)$ (= tangentens lutning)

$$y'=\frac{2x}{a^2}\Big/\frac{2y}{b^2}=\frac{b^2x}{a^2y}$$ Klart! $\otimes$

③ Låt $xe^y = y$. Visa att man kan lösa ut y som en funktion av x nära $x=0$ så att $y(0)=0$. Beräkna a_1 och a_2 i Taylorserien

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Lösning: Vi börjar med att verifiera att $y(x)$ existerar. Skriv $F(x,y) = xe^y - y$
Kurvan ges av $F(x,y)=0$.

Beräkna $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y - 1$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 \cdot e^1 - 1 =$
$= -1 \neq 0$

Dessutom $F(0,0)=0$. Alltså det finns en funktion $y(x)$ så att

$$xe^{y(x)} - y(x) = 0$$

och $y(0)=0$. (Implicita funktionssatsen)

Vi vet att $a_1 = y'(0)$ och $a_2 = \frac{1}{2} y''(0)$

Implicit derivering ger

(*) $$e^{y(x)} + xy'(x)e^{y(x)} - y'(x) = 0$$

Insättning av $x=0$ & $y(0)=0$ ger

$$0 = e^{y(0)} + 0\,y'(0)\,e^{y(0)} - y'(0) = 1 - y'(0)$$

$$\Rightarrow \quad y'(0) = 1 \iff a_1 = 1$$

Implicit derivering av (*) ger

$$y'(x)e^{y(x)} + y'(x)e^{y(x)} + xy''(x)e^{y(x)} + xy'(x)^2 e^{y(x)} - y''(x) = 0$$

Insättning av $x=0$, $y(0)=0$ & $y'(0)=1$ ger

$$2y'(0)e^{y(0)} + 0\cdot y''(0)e^{y(0)} + 0\cdot y'(0)^2\cdot e^{y(0)} - y''(0) = 0$$

$$2\cdot 1\cdot e^0 - y''(0) = 0$$

$$y''(0) = 2$$

Eftersom $a_2 = \frac{1}{2}y''(0) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$.

Alltså, ekvationen $xe^{y(x)} = y(x)$ har en lösning som uppfyller $y(0)=0$ och lösningens Taylorutveckling börjar

$$y(x) = x + x^2 + \ldots$$

Demouppgifter 3

(1) En funktion f som uppfyller

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

kallas en harmonisk funktion. Antag att $u(x,y)$ och $v(x,y)$ har kontinuerlig derivator av första och andra ordning. Antag att u och v uppfyller Cauchy-Riemannekvationerna

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Visa att u och v är harmoniska.

<u>Lösning:</u> Vi beräknar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

eftersom $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ (här är det viktigt att derivatorna är kontinuerliga)

På samma sätt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

Klart!

(2) Antag att $f(x)$ och $g(y)$ har kontinuerliga derivator av första och andra ordning. Visa att funktionen

$$u(x,y) = f(x)g(y)$$

löser

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Lösning: Vi ser $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x)g(y)$ och $\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)g'(y)$. Dessutom $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'(x)g'(y)$.

Vi kontrollerar

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = f(x)g(y)f'(x)g'(y) - f'(x)g(y)f(x)g'(y) = 0$$

För att visa omvändningen studera

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_x}{u}\right) \quad \text{och} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_y}{u}\right)$$

för en lösning till $u u_{xy} - u_x u_y = 0$.

③ Visa att $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ löser de partiella differentialekvationerna

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = 0.$$

<u>Lösning:</u> Vi har $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ och får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}.$$

Vi ser att

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = \frac{e^x + e^y}{e^x + e^y} = 1$$

Man kan nu beräkna $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ explicit men man kan också utnyttja att $f_x + f_y = 1$

$$f_x = 1 - f_y \Rightarrow f_{xx} = -f_{yx} = -f_{xy}$$

$$f_y = 1 - f_x \Rightarrow f_{yy} = -f_{xy}$$

$$\Rightarrow f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-f_{xy})(-f_{xy}) - (f_{xy})^2 = 0$$

Klart!