Aalto-universitetet
Björn Ivarsson

Demonstrationsuppgifter 3
Differential- och integralkalkyl 2, MS-A0209.
Räknas vid övningen torsdag 25.1 eller fredag 26.1. Lösningarna gås igenom av assistenten.

(1) En funktion f som uppfyller
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
kallas för en harmonisk funktion. Antag att $u(x, y)$ och $v(x, y)$ har kontinuerliga derivator av första och andra ordning. Antag att u och v uppfyller Cauchy-Riemannekvationerna
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
och
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Visa att u och v är harmoniska.

(2) Antag att $f(x)$ och $g(y)$ har kontinuerliga derivator av första och andra ordning. Visa att funktionen $u(x, y) = f(x)g(y)$ löser den partiella differentialekvationen
$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$
(*Det är möjligt att visa att samtliga lösningar till den partiella differentialekvationen har denna form men det behöver du inte visa.*)

(3) Visa att $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ löser de partiella differentialekvationerna
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$
och
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = 0.$$