

---

# ELEC-C1230 Sääntötekniikka

Luku 5: Navat ja nollat, systeemin nopeus, stabiilisuus ja värähtelyt, Routh-Hurwitz-kriteeri

# Lukuohje

---

- Kertaa lohkokaaviomuunnokset, toteutus Matlabilla ja PID-säädin
- Nollat ja navat, nolla-napakuvio, karakteristinen polynomi, karakteristinen yhtälö
- Stabiilisuus, värähtelyt, systeemin nopeus,
- Routh-Hurwitz-menetelmä
- Tilaesityksen navat ja nollat

# Systemin käyttäytyminen

---

- Systemin tai järjestelmän tärkein ominaisuus on stabiilisuus. Muita ominaisuuksia ovat esim.
  - Nopeus
  - Värähtelyt ja niiden luonne, resonanssi
  - Minimivaiheisuus (minimum phase / non minimum phase), alkutransientit
  - Herkkyys ja robustisuus (sensitivity / robustness), häiriönsietokyky
  - Mahdollinen integroiva tai derivoiva käyttäytyminen
  - Aitous (strictly proper, proper, not proper)
- Aikaisemmilla luennoilla systemin käyttäytyminen määritettiin tarkasti vasteista – joka edellytti Laplace-käänteismuuntamista. Tällä luennolla keskitytään käyttäytymisen tarkasteluun mallin ominaisuuksien perusteella ilman vasteen analyttistä ratkaisemista.

# Systemin navat ja nollat

- Siirtofunktio koostuu osoittaja- ja nimittäjäpolynomeista

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n_z-1} + b_2 s^{n_z-2} + \dots + b_{n_z-2} s^2 + b_{n_z-1} s + b_{n_z}}{s^{n_p} + a_1 s^{n_p-1} + a_2 s^{n_p-2} + \dots + a_{n_p-2} s^2 + a_{n_p-1} s + a_{n_p}} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- Nimittäjäpolynomi on systeemin karakteristinen polynomi

$$\begin{cases} \text{Karakteristinen polynomi: } Q(s) \\ \text{Karakteristinen yhtälö: } Q(s) = 0 \end{cases}$$

- Polynomit voidaan esittää juuriensa tuloina

$$G(s) = \frac{b_1 (s - s_{z1})(s - s_{z2}) \dots (s - s_{z(n_z-2)})(s - s_{z(n_z-1)})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{p(n_p-1)})(s - s_{pn_p})}$$

- Osoittajan nollakohdat (juuret) ovat systeemin nollija ja nimittäjän nollakohdat (juuret) ovat systeemin napoja.

# Systemin navat ja nollat

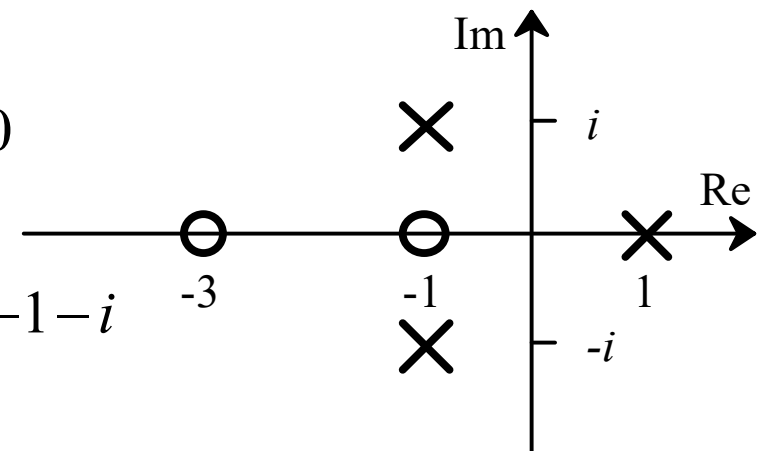
- Napa-nollakuviossa systeemin navat ja nollat esitetään graafisesti kompleksitasossa.

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{(s-1)(s^2+2s+2)} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s-1)((s+1)^2+1)} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s-1)(s+1+i)(s+1-i)}$$

Karakteristinen yhtälö:  $(s-1)(s^2+2s+2) = 0$

Järjestelmän nollat:  $s_{z1} = -1, s_{z2} = -3$

Järjestelmän navat:  $s_{p1} = 1, s_{p2} = -1+i, s_{p3} = -1-i$



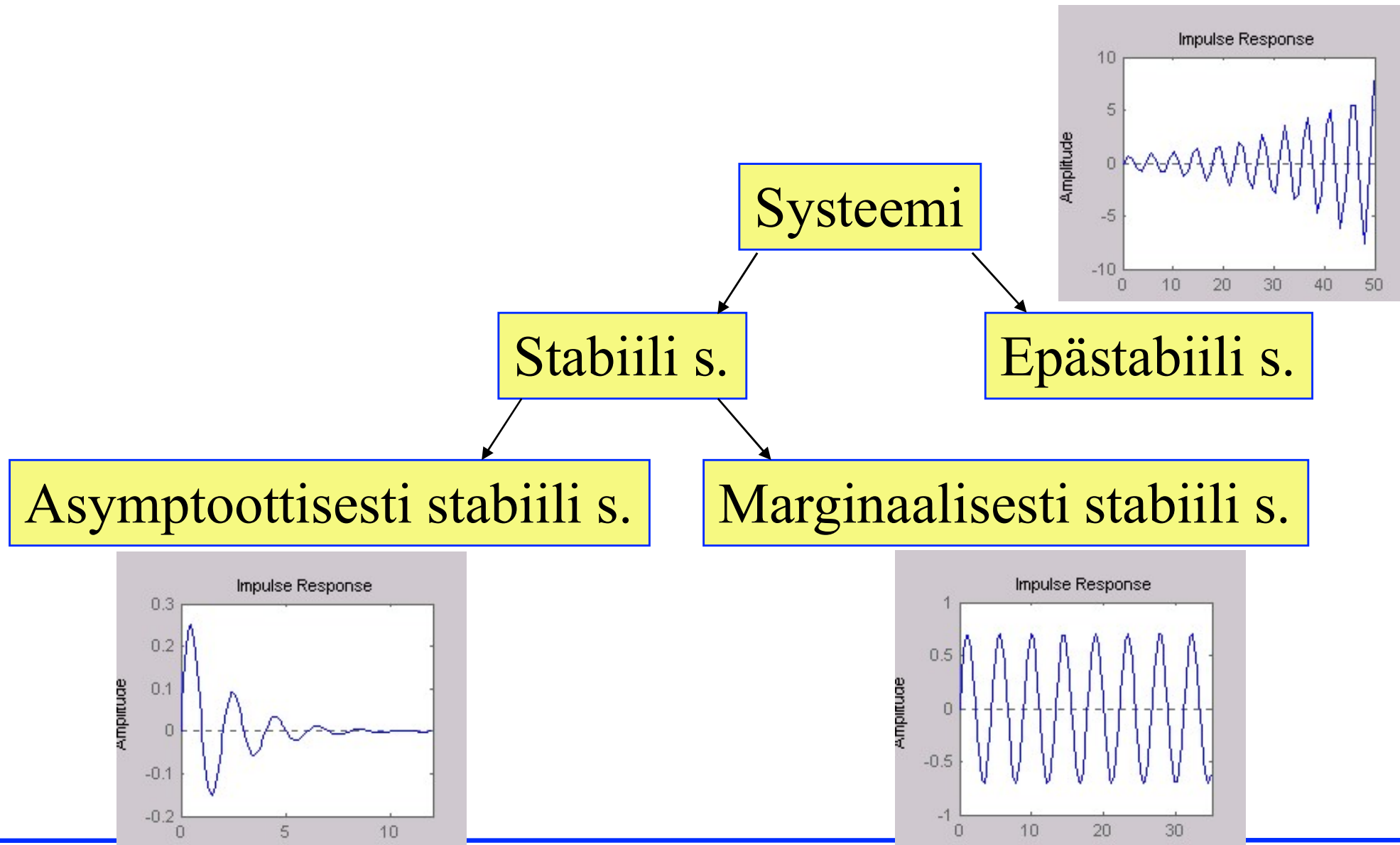
- Kompleksiset juuret esiintyvät aina kompleksikonjugaatteina:  $s_i = a \pm bi \Rightarrow$  Napa-nollakuviio on aina symmetrinen reaaliakselin suhteen.

# Stabiilisuus

---

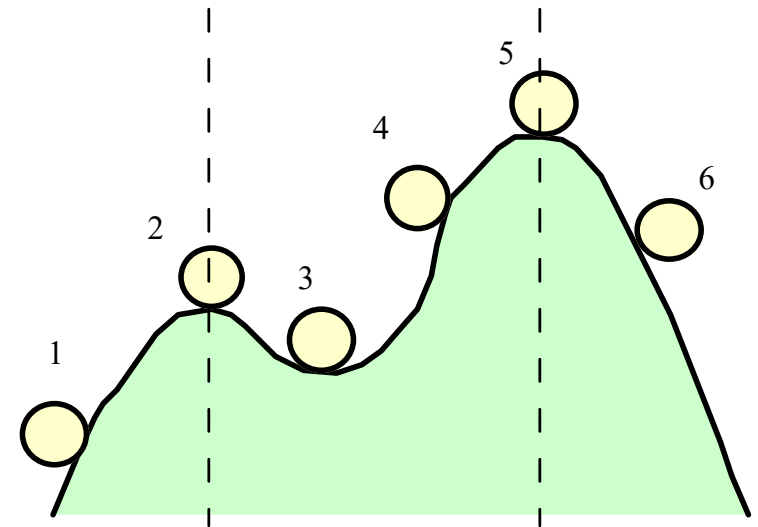
- Stabiilisuudelle on kehitetty useita erilaisia määritelmiä.  
Esim.
  - Yhden ratkaisun stabiilisuus (epälineaariset ja/tai aikavariantit systeemit)
  - Systeemin stabiilisuus (lineaaristen systeemien globaali ominaisuus)
  - Globaali stabiilisuus vs. lokaali stabiilisuus (epälineaariset systeemit)
  - Ljapunov-stabiilisuus eli tilastabiilisuus
  - Asymptoottinen stabiilisuus
  - BIBO-stabiilisuus (Bounded Input - Bounded Output)
  - Marginaalinen stabiilisuus
- Tällä opintojaksolla käsitellään ainoastaan lineaaristen järjestelmien stabiilisuutta, jolloin stabiilisuus on systeemin globaali ominaisuus – stabiilius ei riipu tulosuureista eikä toiminta-alueesta.

# Systemin stabiilisuus



# Stabiilisuus

- Epälineaarilla järjestelmällä stabiilisuus saattaa riippua toiminta-alueesta ja tulosuureesta. Tarkastellaan esimerkiksi kiviä vuorenrinteellä.
  - Systeemillä on yksi stabiili tasapainopiste (laakso, 3) ja kaksi epästabiilia (huiput, 2 ja 5)
  - Stabiilissa toimintapisteessä pienillä ohjauksilla vaste pysyy stabiilina, mutta kun kiviä työnnetään riittävän suurilla voimilla, niin vasteesta voi tulla epästabiili (kivi voi joutua pisteen 2 vasemmalle tai pisteen 5 oikealle puolelle).
  - Epästabiililta alueelta voidaan päätyä sopivalla tulosuureella stabiilille alueelle. Esimerkiksi pisteestä 1 voidaan päästä huipun ohi stabiiliin laaksoon, mutta pisteestä 6 on huomattavasti vaikeampaa päätyä stabiiliin ratkaisuun, koska kivi kerää niin paljon liike-energiaa, että se helposti sujahtaa stabiilin laakson läpi uudelle epästabiilille alueelle.





# Ljapunov-stabiilisuus

- Tilayhtälölle  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$

voidaan johtaa yleinen ratkaisu

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad \Phi(t) = \mathbf{e}^{At}$$

- Tilan  $\mathbf{x}(t)$  käyttäytyminen tulevaisuudessa riippuu kahdesta termistä: autonomisesta osuudesta (alkuarvot) ja ohjausten vaikutuksesta.
- Ljapunov-stabiilisuus tutkii autonomista stabiiliutta. Yksinkertaistettuna voidaan sanoa, että menetelmässä poikkeutetaan tilaa aavistuksen verran alkutilasta ja katsotaan mitä tapahtuu, kun ulkoisia ohjauksia ei käytetä. Jos lineaarinen systeemi on stabiili yhdelle alkuarvolle, niin se on stabiili myös kaikille muille mielivaltaisille alkuarvoille.

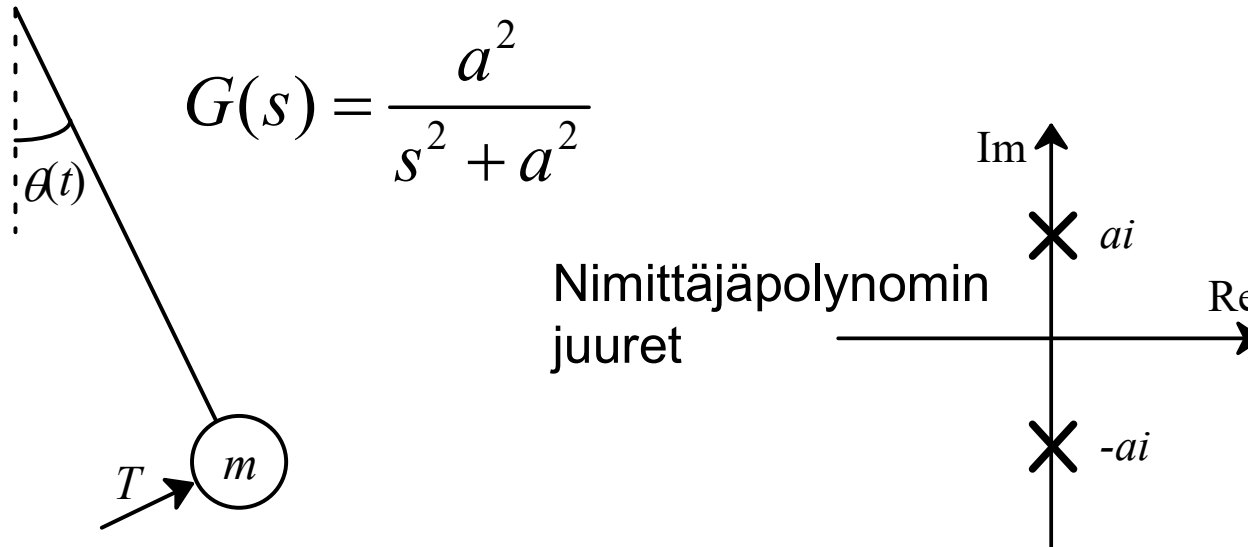
# BIBO-stabiilisuus

---

- BIBO-stabiilisuudessa taas tutkitaan input/output-käyttäytymisen stabiiliutta ja se liittyykin läheisesti edellä esitetyn tilaesityksen ratkaisun toiseen termiin. Systemi on BIBO-stabiili (bounded input – bounded output), jos rajoitetulla ohjauksella  $u$  saadaan aina rajoitettu vaste  $y$ .
- Esimerkiksi varasto (integraattori) ja ideaalinen heiluri (harmoninen värähtelijä) ovat marginaalisesti stabiileja (yleisesti stabiileja) ja Ljapunov-stabiileja, mutta eivät asympotoottisesti stabiileja eivätkä BIBO-stabiileja.
- Käänteinen heiluri ja raketti avaruudessa ovat epästabiileja kaikkien stabiilisuuskriteerien mukaan.
- Ideaalisekoitin (alipäästösuodatin) sekä massakappale jousen ja vaimentimen varassa ovat stabiileja kaikkien edellä esitettyjen stabiilisuuskriteerien mukaisesti.
- Asympotoottinen ja marganaalinen stabiilisuus voidaan lineaarisella systeemillä tutkia esim. impulssivasteen käyttäytymisen perusteella.

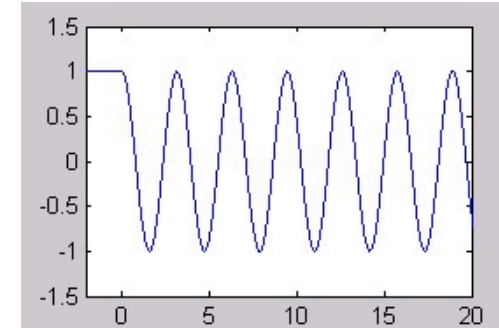
# Esimerkki:

- Harmoninen värähtelijä (lineaariapproksimaatio)

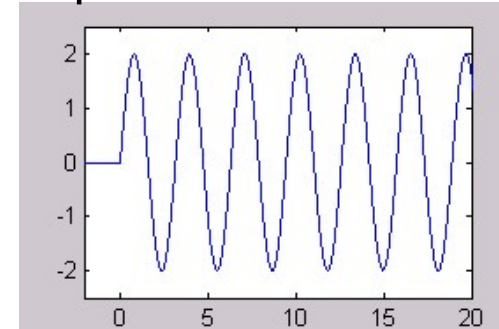


- Siniherätteellä heiluri joutuu resonanssiin ja muuttuu epästabiiliksi => alkuarvoista johtuva vaste on stabiili, mutta on löydettävissä rajoitettu heräte (sinisignaali), jolla vasteesta tulee rajoittamaton.
- Lineaarisoitu heiluri on Ljapunov-stabiili, muttei BIBO-stabiili

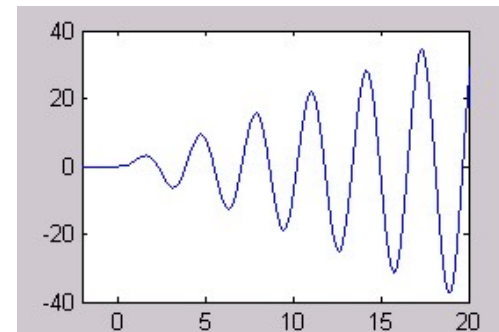
vaste alkuarvolle



impulssivaste



sinivaste



# Impulssivaste ja sen stabiilisuus

- Vahvasti aidon (strictly proper, siirtofunktion osoittaja alempaa kertalukua kuin nimittäjä) systeemin impulssivaste eli painofunktio on Laplace-tasossa siirtofunktio
  - Siirtofunktio voidaan hajottaa osamurtokehitemän avulla tekijöidensä summalausekkeeksi (oletetaan aluksi kaikkien juurten olevan reaalisia ja yksinkertaisia).

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-2} s^2 + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-2} s^2 + b_{n-1} s + b_n}{(s - s_{p1})(s - s_{p2}) \dots (s - s_{p(n-1)})(s - s_{pn})}$$
$$= \frac{K_1}{s - s_{p1}} + \frac{K_2}{s - s_{p2}} + \dots + \frac{K_{n-1}}{s - s_{p(n-1)}} + \frac{K_n}{s - s_{pn}}$$

- Käänteismuunnettuna  $g(t) = K_1 e^{s_{p1}t} + K_2 e^{s_{p2}t} + \dots + K_{n-1} e^{s_{p(n-1)}t} + K_n e^{s_{pn}t}$
- Jos kaikki nimittäjäpolynomin juuret ovat negatiivisia, niin ajan lähestyessä ääretöntä vaste lähestyy nollaa - jos yksikin juuri on positiivinen, niin vastaava summan termi lähestyy ääretöntä. Kun yksi summan termi lähestyy ääretöntä, niin koko summa lähestyy ääretöntä.

# Impulssivaste ja sen stabiilisuus

- Jos juurten joukossa on kompleksisia juuria, niin ne voidaan laventaa toisen asteen nimittäjäpolynomiksi:

$$\frac{As + B}{(s - \operatorname{Re}\{s_{pi}\})^2 + (\operatorname{Im}\{s_{pi}\})^2}, \quad \text{juuret: } \operatorname{Re}\{s_{pi}\} \pm \operatorname{Im}\{s_{pi}\} \cdot i$$

- Käänteismuunnattuna

$$Ae^{\operatorname{Re}\{s_{pi}\}t} \cos(\operatorname{Im}\{s_{pi}\}t) + (B + A \operatorname{Re}\{s_{pi}\})e^{\operatorname{Re}\{s_{pi}\}t} \sin(\operatorname{Im}\{s_{pi}\}t)$$

- Jos nimittäjäpolynomien juurien reaalisosat ovat negatiivisia, niin ajan lähestyessä ääretöntä vaste lähestyy nollaa - positiivisilla reaalisilla vaste lähestyy ääretöntä.
- Tarkastellaan vielä moninkertaisia juuria. Moninkertaiset ( $q$ -kertaiset) juuret esiintyvät osamurtokehitemässä muodossa:

$$\frac{Q_q}{(s - s_{pi})^q} + \frac{Q_{q-1}}{(s - s_{pi})^{q-1}} + \dots + \frac{Q_2}{(s - s_{pi})^2} + \frac{Q_1}{s - s_{pi}}$$

- Käänteismuunnattuna: 
$$\frac{Q_q}{(q-1)!} t^{q-1} e^{s_{pi}t} + \frac{Q_{q-1}}{(q-2)!} t^{q-2} e^{s_{pi}t} + \dots + Q_2 t e^{s_{pi}t} + Q_1 e^{s_{pi}t}$$

# Impulssivaste ja sen stabiilisuus

---

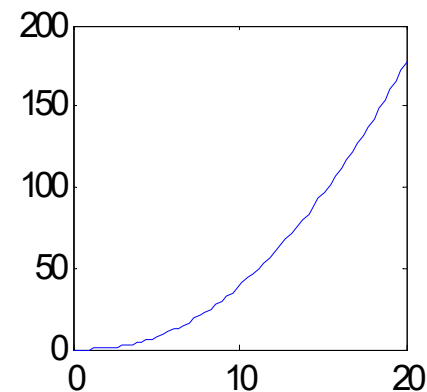
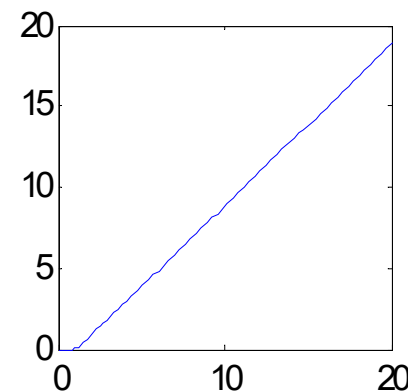
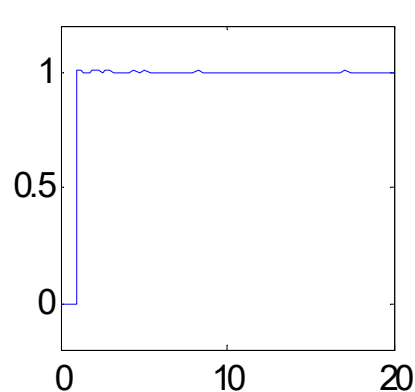
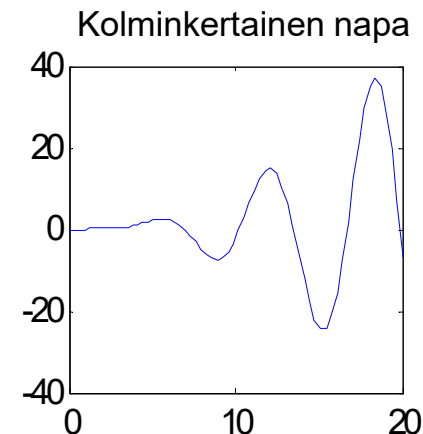
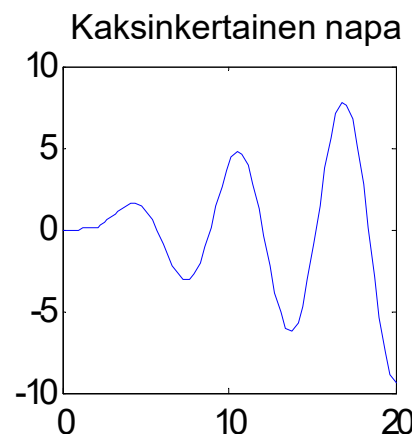
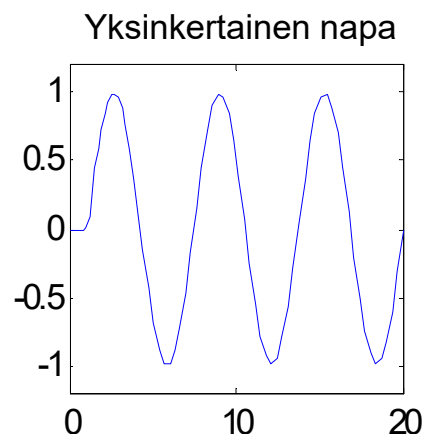
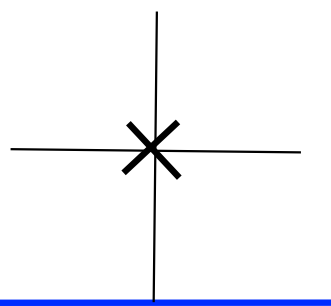
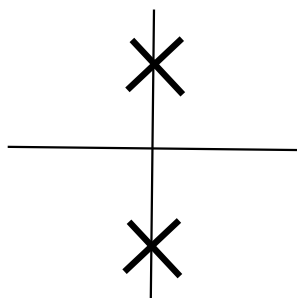
- Jos nimittäjäpolynomin moninkertainen juuri on negatiivinen, niin ajan lähestyessä ääretöntä vasteen kaikki termit lähestyvät nollaa - positiivisella juurella vaste lähestyy ääretöntä.
- Moninkertaisilla kompleksisilla juurilla saadaan vastelausekkeeseen termejä

$$K_{i1} t^i e^{\operatorname{Re}\{s_{pi}\}t} \sin(\operatorname{Im}\{s_{pi}\}t) \quad \text{ja} \quad K_{i2} t^i e^{\operatorname{Re}\{s_{pi}\}t} \cos(\operatorname{Im}\{s_{pi}\}t)$$

- Nämä termit lähestyvät nollaa ajan lähestyessä ääretöntä, jos moninkertaisen kompleksisen juuren reaaliosa on negatiivinen - positiivisella reaaliiosalla termit lähestyvät ääretöntä.
- Yhteenvetona voidaan todeta impulssivasteen lähestyvän nollaa ajan lähestyessä ääretöntä vain jos jokaisen nimittäjäpolynomin juuren reaaliosa on negatiivinen. Tämä on asymptoottisen stabiilisuuden kriteeri. Jos yhdenkin juuren reaaliosa on positiivinen, niin vaste lähestyy ääretöntä ajan lähestyessä ääretöntä ja systeemi on epästabiili.

# Marginaalinen stabiilisuus

- Mikäli systeemin kaikki navat ovat kompleksitason vasemmassa puolitasossa, niin systeemi on asymptotisesti stabiili ja mikäli yksikin napa on oikeassa puolitasossa, niin systeemi on epästabiili - entä jos systeemillä ei ole nappoja oikeassa puolitasossa vaan rajalla eli imaginääriakselilla - miten impulssivaste silloin käyttäytyy?



# Marginaalinen stabiilisuus

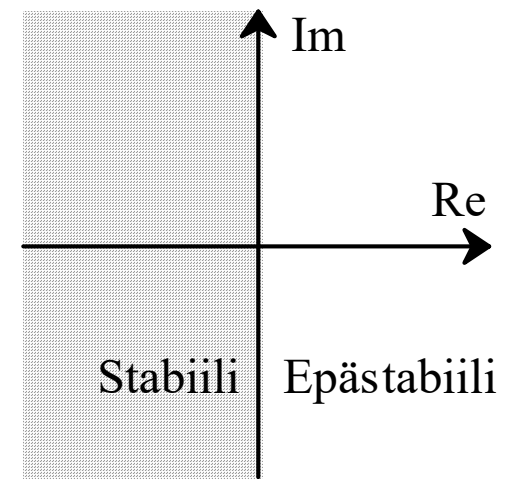
---

- Mikäli systeemillä on yksinkertaisia najoja imaginääriaksella eikä lainkaan najoja oikeassa puolitasossa, niin se on marginaalisesti stabiili (eli Ljapunov-stabiili).
- Mikäli systeemillä on moninkertaisia najoja imaginääriakselilla, niin se on epästabiili kaikkien stabiilisuuskriteerien mukaan.
- Mikäli systeemillä on yksikin napa imaginääriaksella, niin se ei ole asympotoottisesti stabiili eikä BIBO-stabiili.



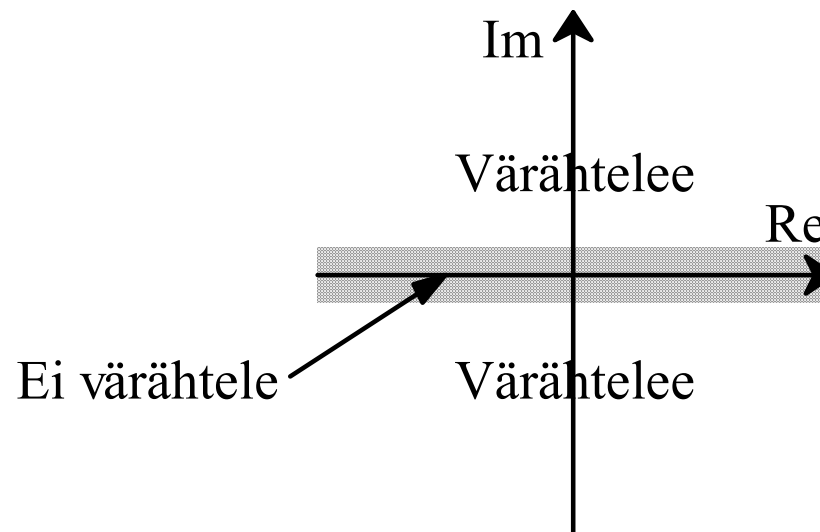
# Stabiilisuus

- Systeemi on asymptoottisesti stabiili, jos kaikki sen navat ovat kompleksitason vasemmassa puolitasossa.
- Systeemi on epästabiili, jos sillä on yksikin napa kompleksitason oikeassa puolitasossa tai sillä on moninkertaisia napoja imaginääriakselilla
- Systeemi on marginaalisesti stabiili, jos sillä on yksi tai useampia yksinkertaisia napoja imaginääriakselilla eikä ainoatakaan napaa oikeassa puolitasossa.
- Systeemi on tulo-lähtöstabiili (BIBO-stabiili, bounded input – bounded output), jos jokainen rajoitettu tulosuure johtaa rajoitettuun output-suureeseen.
- Lineaarilla systeemillä asymptoottinen stabiilius implikoi BIBO-stabiilisuuden. BIBO-stabiilisuus implikoi asymptoottisen stabiilisuuden, EDELLYTTÄEN että systeemi on *saavutettava (ohjattava) ja tarkkailtava*. (Ei nollanapa-supistuksia siirtofunktiota muodostettaessa; kts. jäljempänä ja tilamenetelmien yhteydessä.)



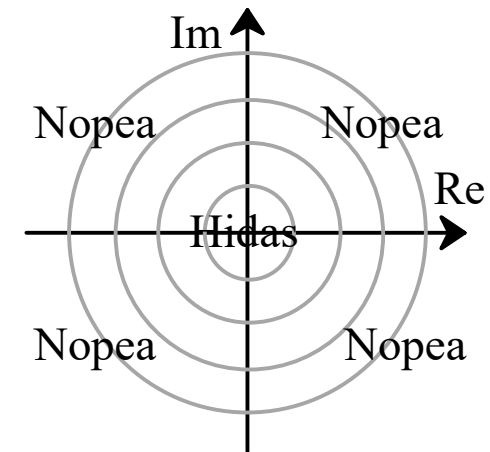
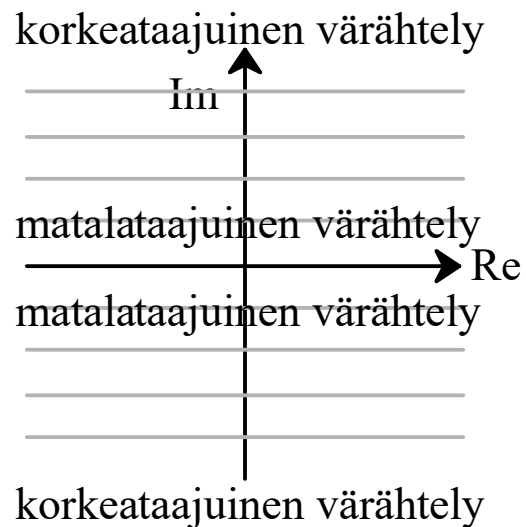
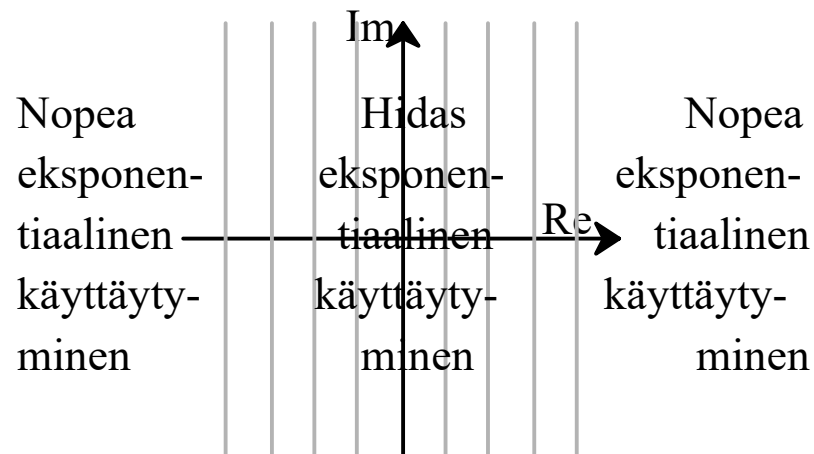
# Värähtelyt

- Laplace-muunnospareista tiedetään, että jos systeemillä on nimittäjässä kompleksisia juuria, niin kyseiset termit voidaan täydentää neliöksi, jolloin Laplace-käänteismuunnokseksi saadaan sini- ja kosinifunktioita (kompleksiset juuret voidaan myös käänteismuuntaa suoraan kompleksisiksi eksponenttifunktioiksi, joista saadaan sinejä ja kosineja Eulerin kaavoilla).
- Aivan kuten stabiilisuudellakin, niin värähtelylle voidaan todeta, että jos yksikin summan termi värähtelee, niin koko summa värähtelee.
- Järjestelmän vaste ei värähtele, mikäli sen navat ovat reaalisia. Vaste värähtelee, jos yksikin napapari on aidosti kompleksinen (ei sijaitse reaaliakselilla).



# Nopeus

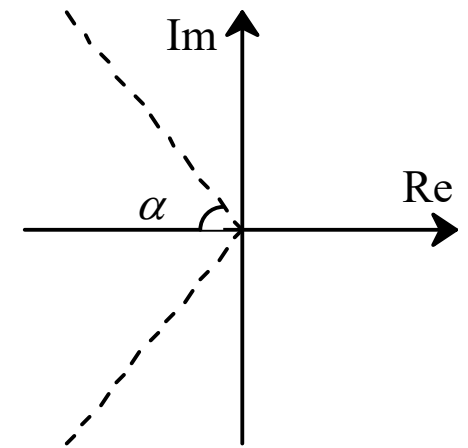
- Etäisyys imaginääriakselista kuvaa eksponentiaalista käyttäytymistä (mitä kauempana imaginääriakselista ollaan sitä nopeammin systeemi saavuttaa loppuarvonsa (vasemmassa puolitasossa) tai karkaa äärettömyyteen (oikeassa puolitasossa)).
- Etäisyys reaaliakselista kuvaa värähtelyn taajuutta (mitä kauempana reaaliakselista ollaan sitä suurempi taajuus).
- Järjestelmä on sitä nopeampi mitä kauempana sen navat ovat origosta



# Värähtelyn vaimennussuhde

- Systemin vaimennussuhde, kuvaa värähtelyn vaimenemista.
- Vaimennussuhde saadaan laskettua kompleksisen napaparin ja negatiivisen reaaliakselin välisen kulman kosinista – tämä pätee vain silloin kun kulma on olemassa – eli aidosti kompleksisella napaparilla.
- Jos vaimennussuhde on ykköstä suurempi, niin systeemi on ylivaimennettu (reaaliset negatiiviset navat).
- Jos vaimennussuhde on yksi, niin systeemi on kriittisesti vaimennettu (kaksinkertainen negatiivinen napapari reaaliakselilla).
- Jos vaimennussuhde on yhden ja nollan välillä, niin systeemi on alivaimennettu (aidosti kompleksinen napapari vasemmassa puolitasossa).
- Jos vaimennussuhde on nolla, niin systeemi on harmoninen värähtelijä (navat imaginääriakselilla).
- Jos vaimennussuhde on negatiivinen, niin systeemi on epästabiili (navat oikeassa puolitasossa).
- Jos vaimennussuhteen itseisarvo on ykköstä suurempi, niin systeemi ei värähtele (navat reaaliakselilla).

$$\zeta = \cos(\alpha)$$



$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Vaimennussuhde  $\zeta$   
Luonnollinen kulmataajuus  $\omega_0$ ,  $k$  vakio

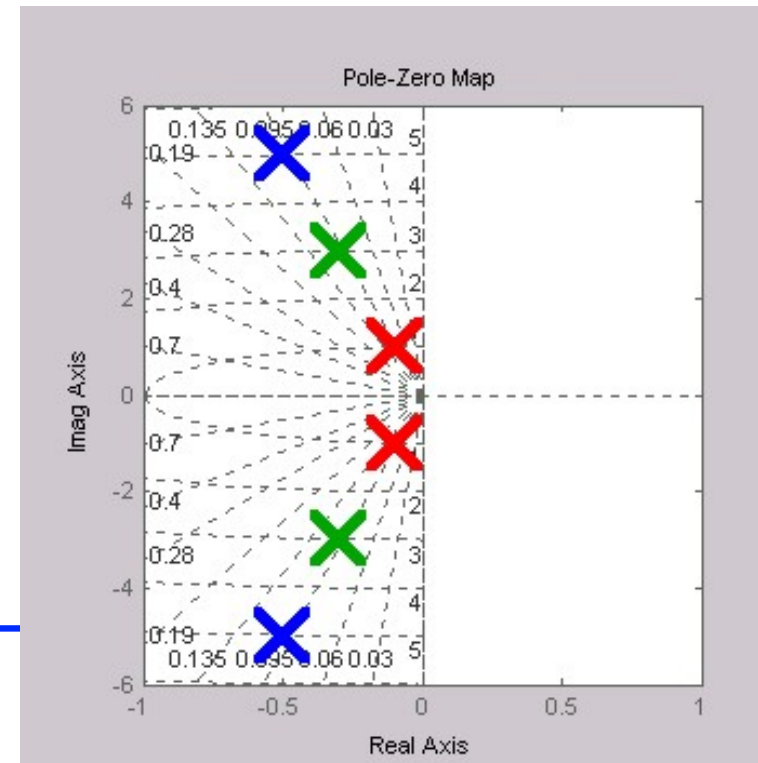
# Esimerkki: vaimennussuhde ja vasteet

- Tarkastellaan kolmea eri prosessia

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1(s) = \frac{5}{s^2 + s + 25} \Rightarrow \zeta = 0.1, \omega_n = 5 \Leftrightarrow s_{p1,2} = -0.5 \pm 4.97i \\ G_2(s) = \frac{3}{s^2 + 0.6s + 9} \Rightarrow \zeta = 0.1, \omega_n = 3 \Leftrightarrow s_{p1,2} = -0.3 \pm 2.98i \\ G_3(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} \Rightarrow \zeta = 0.1, \omega_n = 1 \Leftrightarrow s_{p1,2} = -0.1 \pm 0.99i \end{array} \right.$$

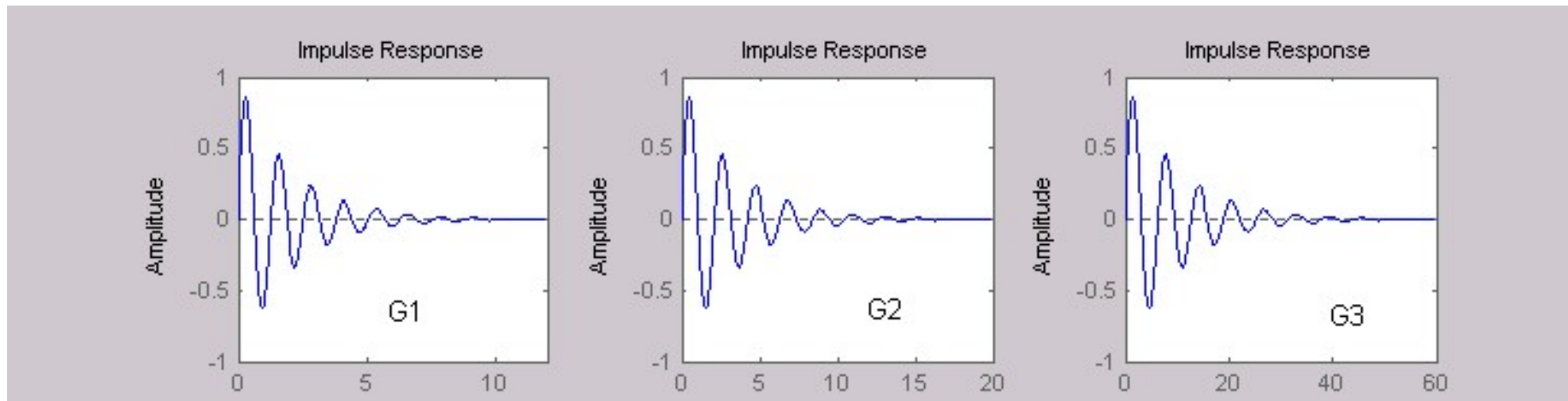
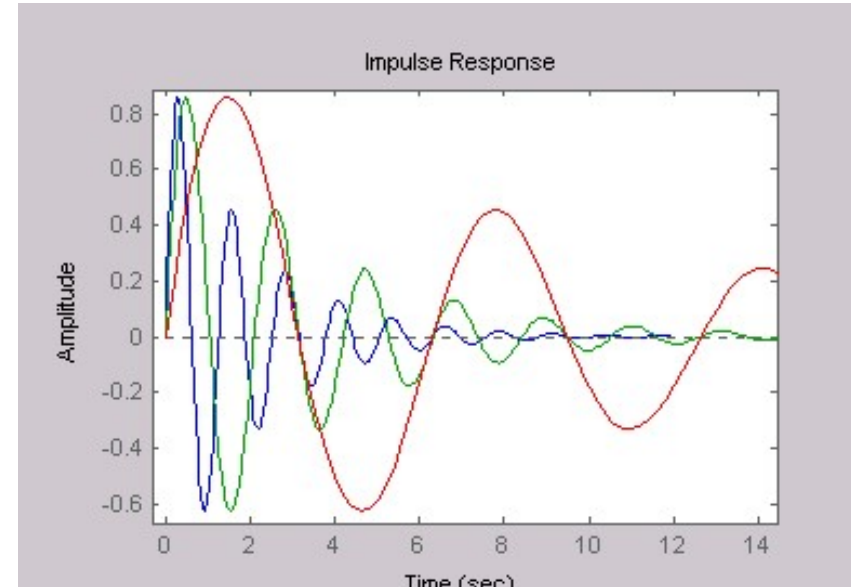
- Kaikilla on sama vaimennussuhde, mutta eri etäisyys origosta.
- Piirretään napanollakuvio MATLABissa

```
sys1=tf(5,[1 1 25])
sys2=tf(3,[1 0.6 9])
sys3=tf(1,[1 0.2 1])
pzmap(sys1,sys2,sys3)
sgrid
```



# Esimerkki: vaimennussuhde ja vasteet

- Vasteiksi saadaan:  
`impulse(sys1)`  
`impulse(sys2)`  
`impulse(sys3)`
- Systemeilla on eri nopeudet, mutta jokaisen systeemin värähtely vaimenee yhtä tehokkaasti.
- Jos kukin impulssivaste skaalattaisiin ajan suhteen, niin vasteet olisivat identtisiä.



# Dominoivat navat

---

- Tarkastellaan systeemiä: 
$$G(s) = \frac{1000}{(s+1)(s+10)(s+100)}$$

- Tämän askelvaste on

$$y(t) = 1 - 1.1223e^{-t} + 0.1235e^{-10t} - 0.0011e^{-100t}$$

- Mitä kauempana imaginääriakselista napa on, sitä pienemmällä kertoimella se esiintyy vasteen lausekkeessa.
- Stabiilia käyttäytymistä dominoivat navat ja napaparit ovat ne, jotka ovat kaikkein lähimpänä imaginääriakselia – sama pätee myös nolliin ja nollapareihin.
- Epästabiili käyttäytyminen on kuitenkin aina dominoivaa.

# Nollat

- Jos navat vaikuttavat stabiilisuuteen, värähtelyyn ja nopeuteen, niin mitä nollat sitten tekevät?
- Otetaan esimerkki: prosessi, jossa on kaksi stabiilia napaa (pisteissä -2 ja -3) ja yksi nolla.

$$G(s) = \frac{(\tau_3 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{(\tau_3 s + 1)}{(\frac{1}{3} s + 1)(\frac{1}{2} s + 1)}$$

- Lasketaan askelvaste:

$$Y(s) = \frac{(\tau_3 s + 1)}{(\frac{1}{3} s + 1)(\frac{1}{2} s + 1)s} = \frac{1}{s} + \frac{2 - 6\tau_3}{s + 3} + \frac{6\tau_3 - 3}{s + 2}$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 + (2 - 6\tau_3)e^{-3t} + (6\tau_3 - 3)e^{-2t}$$

- Nollat vaikuttavat eri tekijöiden kertoimiin. Kokeillaan erilaisia nollan arvoja ja tarkastellaan miten askelvaste muuttuu.

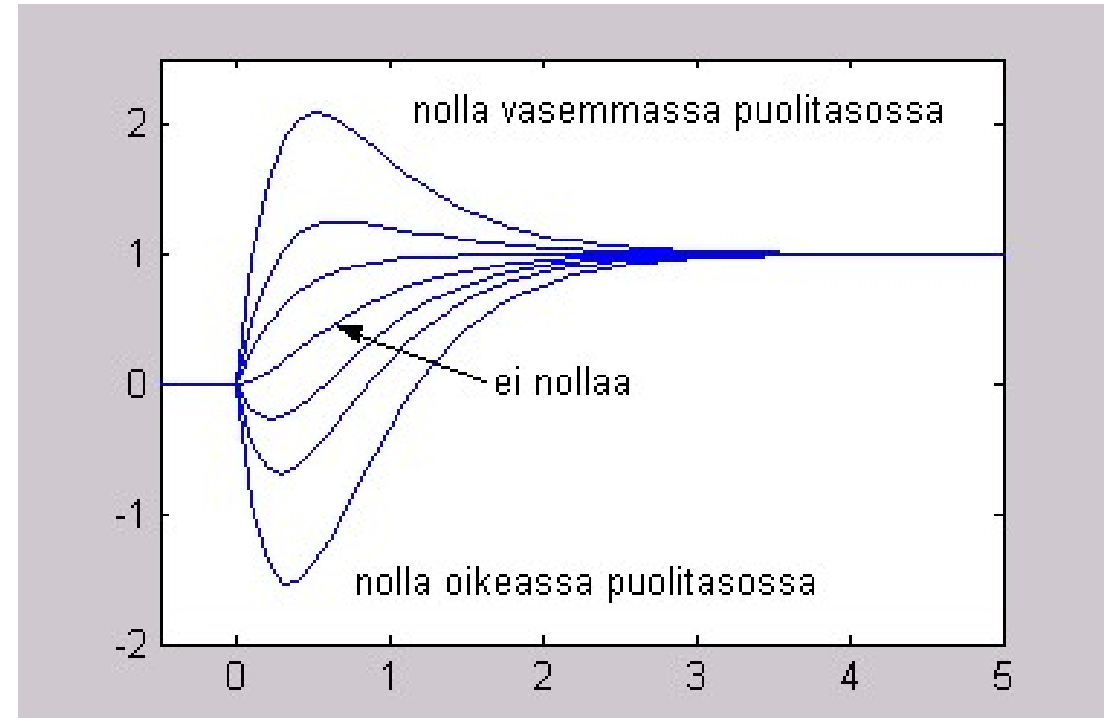
$$\tau_3 \text{ saa arvot: } -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$$

$$(\text{vastaavat nollat ovat: } \frac{1}{2}, 1, 2, \text{ ei nollaa, } -2, -1, -\frac{1}{2})$$



# Nollat

- Nollat vaikuttavat vasteiden alkukäyttäytymiseen - ne vastaavat vaikutukseltaan alkuarvoja.
- Mikäli systeemillä on yksikin nolla oikeassa puolitasossa, niin systeemi on ei-minimivaiheinen ja vastaavasti jos kaikki sen nollat ovat vasemmassa puolitasossa (ja se on viiveetön), niin se on minimivaiheinen.
- Nollat voivat kumota vastaavan navan ja samalla kyseisen käyttäytymisen (esim. värähtelyn). On kuitenkin huomattava, että epästabiilia napaa ja käyttäytymistä ei voida kompensoida ei-minimivaiheisella nollalla.



# Stabiilisuustestit

---

- Jos tunnetaan systeemin navat (nimittäjäpolynomin nollakohdat), niin stabiilisuus on helppo todeta.
  - Juuret voidaan määrittää numeerisesta polynomista iteratiivisilla laskentarutiineilla (kuten komennot `eig`, `roots` tai `pole` MATLABissa).
    - Esim. polynomille  $s^3 + 2s^2 + 4s + 10$ 

```
roots([1 2 4 10])
ans =      -2.2236
          0.1118 + 2.1177i
          0.1118 - 2.1177i
```
  - Jos jokin polynomin kertoimista on nolla tai negatiivinen, niin polynomilla on vähintään yksi juuri imaginääriakselilla tai oikeassa puolitasossa.
  - Jos polynomissa on mukana symbolisia parametreja ja tahdotaan ratkaista, millä parametrien arvoilla systeemi on stabiili, niin juurien ratkaisu numeerisesti ei enää onnistu. Tällöin voidaan käyttää Routhin kaaviota.

# Routhin kaavio

- Polynomille  $a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$  muodostetaan Routhin kaavio seuraavasti:

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$a_8$	$\dots$	
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$a_9$	$\dots$	
$s^{n-2}$	$b_0$	$b_2$	$b_4$	$b_6$	$\dots$		
$s^{n-3}$	$b_1$	$b_3$	$b_5$	$b_7$	$\dots$		
$s^{n-4}$	$c_0$	$c_2$	$c_4$	$\dots$			$b_0 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad b_4 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}, \quad \dots$
$s^{n-5}$	$c_1$	$c_3$	$c_5$	$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$						$b_1 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_0 & b_4 \end{vmatrix}, \quad b_5 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_0 & b_6 \end{vmatrix}, \quad \dots$
$s^1$	$z_0$						
$s^0$	$z_1$						$c_0 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}, \quad c_4 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} b_0 & b_6 \\ b_1 & b_7 \end{vmatrix}, \quad \dots$
							$\vdots$
							$z_1 = a_n$

# Routhin kaavio

---

- Routhin kaavion ensimmäisessä sarakkeessa olevien merkinvaihtojen lukumäärä on samalla myös polynomin oikeassa puolitasossa olevien juurien lukumäärä.
- Jos systeemin karakteristinen polynomi sijoitetaan Routhin kaavioon, niin systeemi on stabiili, jos ensimmäisessä sarakkeessa ei ole ainoatakaan merkinvaihtoa.
- Jos kaaviota muodostettaessa sen ensimmäiseen sarakkeeseen tulee nolla, niin sen tilalle kaavioon sijoitetaan pieni positiivinen luku  $\varepsilon$  ja jatketaan kaavion muodostamista. Lopullisesta kaaviosta voidaan laskea merkinvaihdot tutkimalla  $\varepsilon$ :sta riippuvien termien raja-arvot, kun  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- Mikäli kaavioon muodostuu koko rivi nollia, niin välittömästi nollariviä ylemmästä rivistä voidaan muodostaa polynomi, jolla alkuperäinen polynomi on jaollinen.

# Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomit:

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 10$$

$s^3$	1	4
$s^2$	2	10
$s^1$	-1	
$s^0$	10	

Kaksi merkinvaihtoa  $2 \rightarrow -1$   
ja  $-1 \rightarrow 10$   
eli kaksi juurta oikeassa  
puolitasossa

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 2$$

$s^4$	1	6	2
$s^3$	4	4	
$s^2$	5	2	
$s^1$	$12/5$		
$s^0$	2		

Ei merkinvaihtoja ensimmäisessä  
sarakkeessa  
eli ei juuria oikeassa  
puolitasossa

# Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomi:  $s^3 + s^2 + 2s + 2$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ \hline s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & & \end{array}$$

Saadaan nollarivi, jolloin ylemmältä riviltä saadaan polynomi  $s^2 + 2$  jolla alkuperäinen polynomi on jaollinen.

Lasketaan tämän polynomin derivaatta  $s$ :n suhteen ja sijoitetaan se kaavioon ... ja jatketaan

$$\frac{d}{ds}(s^2 + 2) = 2s$$
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ \hline s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Ei merkinvaihtoja, joten ei juuria oikeassa puolitasossa

# Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomi:  $s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 12s + 12$

$s^4$	1	4	12
$s^3$	3	12	
$s^2$	$0 \rightarrow \varepsilon$	12	
$s^1$	$(12\varepsilon - 36) / \varepsilon$		
$s^0$	12		

Ensimmäiseen sarakkeeseen tulee nolla, jolloin korvataan se pienellä positiivisella luvulla  $\varepsilon$  ja jatketaan kaavion muodostamista

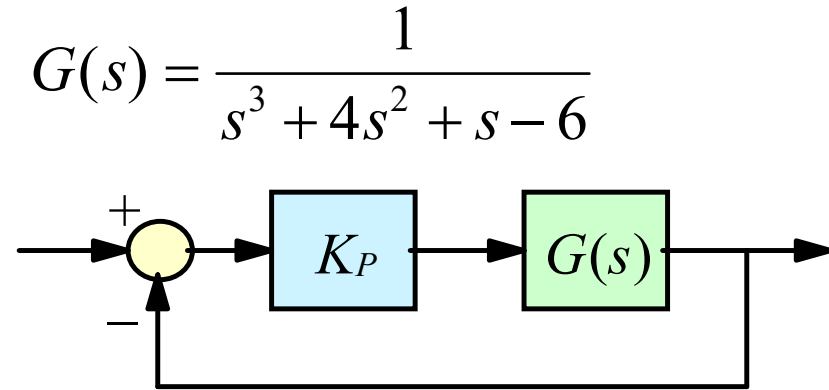
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{12\varepsilon - 36}{\varepsilon} \right\} = -\infty$$

$s^4$	1	4	12
$s^3$	3	12	
$s^2$	0	12	
$s^1$	$-\infty$		
$s^0$	12		

kaksi merkinvaihtoa  $0 \rightarrow -\infty$  ja  $-\infty \rightarrow 12$   
 $\Rightarrow$  kaksi juurta oikeassa puolitasossa

# Esimerkit: Routhin kaavio

- Systeemiä, jonka siirtofunktio on  $G(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$  säädetään P-säätimellä.
- Millä  $K_P$ :n arvoilla säädetty järjestelmä on stabiili?



$$G_{TOT}(s) = \frac{K_P G(s)}{1 + K_P G(s)} = \frac{\frac{K_P}{s^3 + 4s^2 + s - 6}}{1 + \frac{K_P}{s^3 + 4s^2 + s - 6}} = \frac{K_P}{s^3 + 4s^2 + s + (K_P - 6)}$$

$s^3$	1	1
$s^2$	4	$K_P - 6$
$s^1$	$\frac{10 - K_P}{4}$	
$s^0$	$K_P - 6$	

Stabiili, jos

$$\frac{10 - K_P}{4} \geq 0 \text{ ja } K_P - 6 \geq 0$$

$$\Rightarrow 6 \leq K_P \leq 10$$



# Tilaesityksen navat ja nollat

- Kolmannella luennolla johdettiin siirtofunktion ja tilaesityksen välinen muunnoskaava.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- Käänteismatriisi lasketaan jakamalla liittomatriisi (adjoint) determinantilla.

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

- Karakteristinen polynomi:  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$
- Systemin navat ovat polynomien " $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ " juuret
- Systemin nollat ovat polynomien " $\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ " juuret

- MIMO-systeemeillä karakteristisissa polynomeissa on kaikkien systeemin siirtofunktioiden navat ja osoittajapolynomista tulee polynomimatriisi, jossa on kunkin siirtofunktion nollat erikseen - osa nollista ja navoista supistuu.

# Esimerkki

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = [1 \quad 1] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Määritetään systeemin navat ja nollat

Karakteristinen yhtälö:  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix} = (s+1)(s-3) = 0$

$$\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = [1 \quad 1] \operatorname{adj} \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s-3 & 2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = [2(s+3) \quad s-3]$$

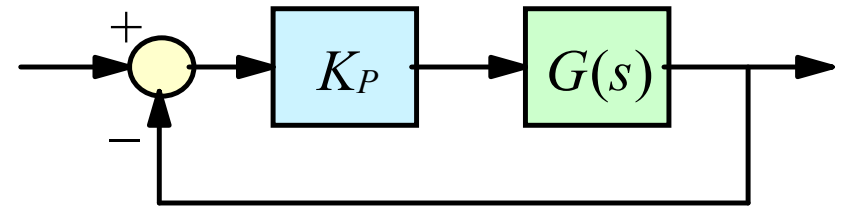
$$\Rightarrow \mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+1)(s-3)} & \frac{s-3}{(s+1)(s-3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+1)(s-3)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

- Systeemillä on kaksi napaa (-1 ja 3) sekä yksi nolla (-3)

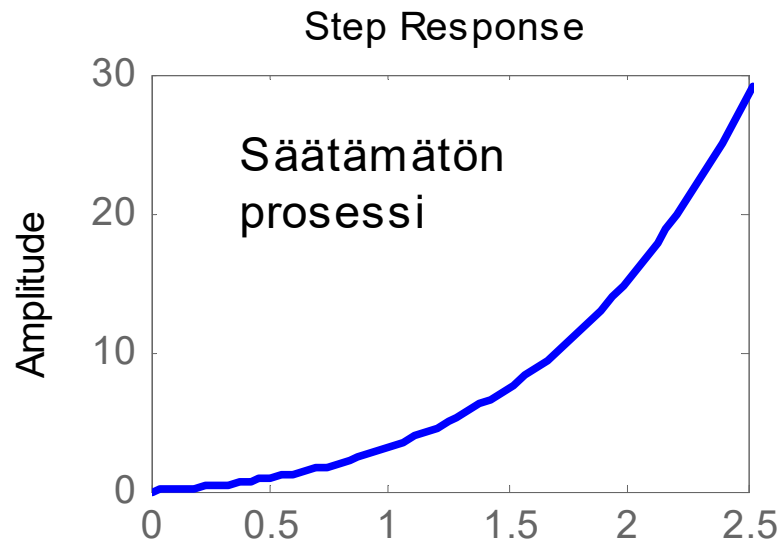
# Esimerkki: säädetyin järjestelmän käyttäytyminen

- Tutkitaan säädetyin järjestelmän käyttäytymistä säätimen (P-säädin) eri virityksillä.

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2-s} = \frac{s+2}{s(s-1)}$$



- Säätämätön prosessi on epästabiili



Säädetylle järjestelmälle

$$\begin{aligned} G_{TOT}(s) &= \frac{K_P G(s)}{1 + K_P G(s)} = \frac{K_P (s+2)}{s^2 - s + K_P (s+2)} \\ &= \frac{K_P (s+2)}{s^2 + (K_P - 1)s + 2K_P} \end{aligned}$$

# Esimerkki: säädetyin järjestelmän käyttäytyminen

---

- Säädetyin järjestelmän karakteristinen yhtälö  $s^2 + (K_P - 1)s + 2K_P = 0$
- Säädetyin järjestelmän navat (toisen asteen yhtälön ratkaisu):

$$s_{p,1,2} = -\frac{K_P - 1}{2} \pm \frac{\sqrt{K_P^2 - 10K_P + 1}}{2}$$

- Säädetty järjestelmä ei värähtele, kun navat ovat reaalisia

$$K_P^2 - 10K_P + 1 \geq 0 \Rightarrow (K_P - 5 + 2\sqrt{6})(K_P - 5 - 2\sqrt{6}) \geq 0$$

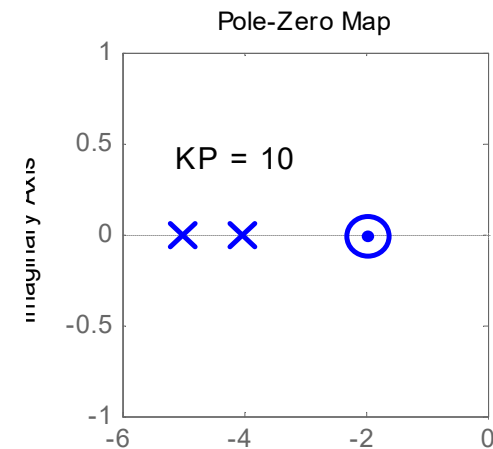
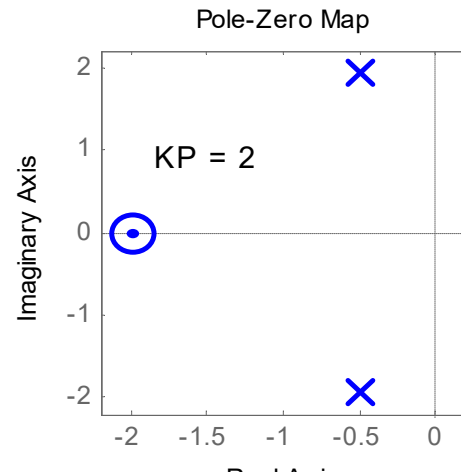
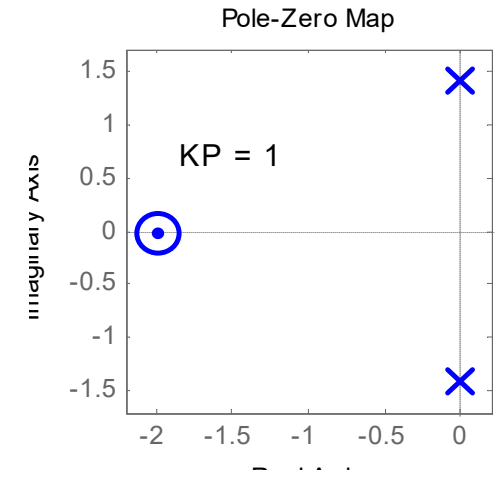
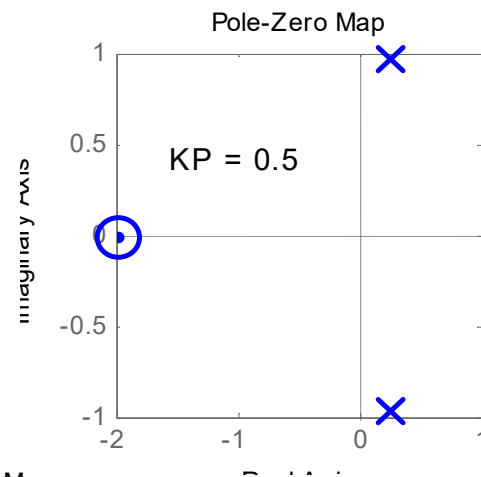
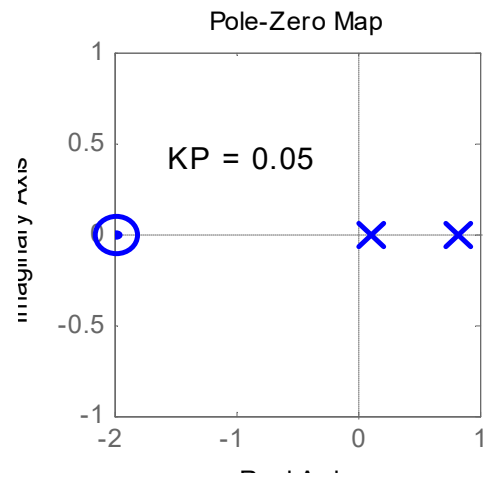
$$\Rightarrow K_P \leq 5 - 2\sqrt{6} \approx 0.1010 \quad \text{tai} \quad K_P \geq 5 + 2\sqrt{6} \approx 9.8990$$

- Säädetty järjestelmä on stabiili, kun navat ovat vasemmassa puolitasossa

$$K_P \geq 0 \quad \text{ja} \quad K_P - 1 \geq 0 \Rightarrow K_P \geq 1$$

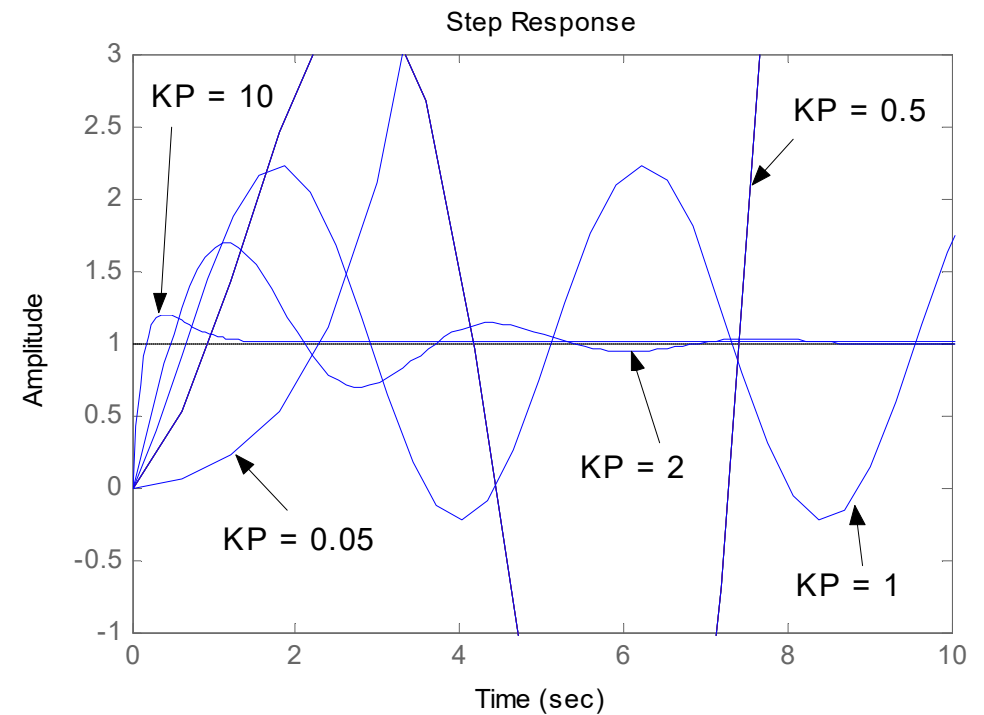
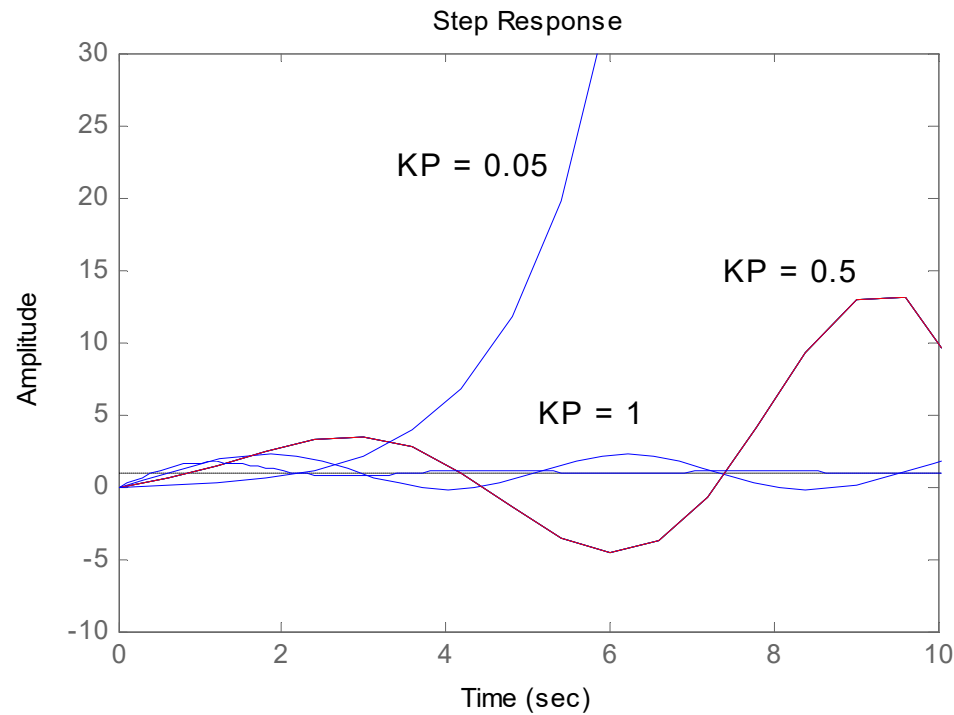
# Esimerkki: säädetyin järjestelmän käyttäytyminen

- Määritetään navat ja piirretään säädetyin järjestelmän napakuvioita muutamalla eri  $K_P$ :n arvolla



# Esimerkki: säädetyin järjestelmän käyttäytyminen

- Vastaavat askelvasteet ovat:



# Esimerkki: säädetyin järjestelmän käyttäytyminen

---

- Tämän perusteella voidaan todeta säädetyille järjestelmälle

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p \leq 5 - 2\sqrt{6}, \quad \text{Vaste on värähtelemätön ja epästabiili} \\ 5 - 2\sqrt{6} \leq K_p < 1, \quad \text{Vaste on amplitudiltaan kasvavaa, epästabillia värähtelyä} \\ K_p = 1, \quad \text{Vaste on harmonista värähtelyä} \\ 1 < K_p < 5 + 2\sqrt{6}, \quad \text{Vaste on vaimenevaa, stabiilia värähtelyä (alivaimennettu)} \\ K_p = 5 + 2\sqrt{6}, \quad \text{Vaste on värähtelemätön ja stabiili (kriittisesti vaimennettu)} \\ K_p > 5 + 2\sqrt{6}, \quad \text{Vaste on värähtelemätön ja stabiili (ylivaimennettu)} \end{array} \right.$$

# Yleiset siirtofunktiomallit: 1. kertaluku

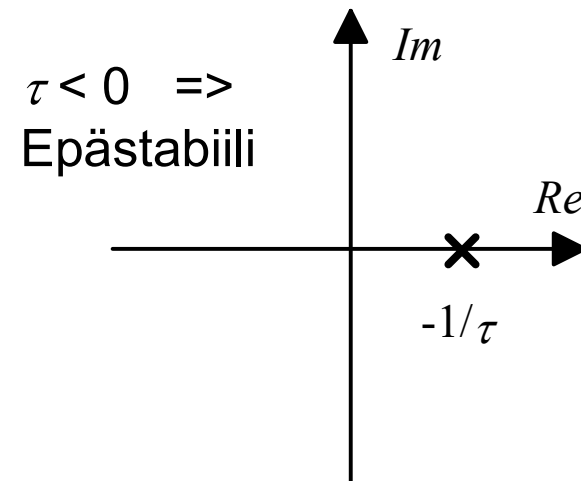
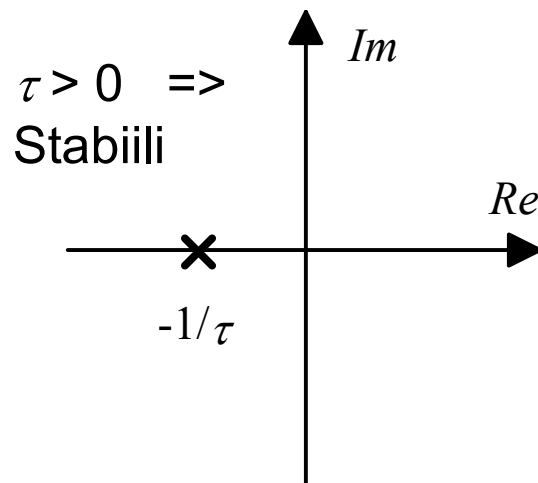
- 1. kertaluvun dynamiikka

- Differentiaaliyhtälö ja siirtofunktio:

- $K$  on systeemin vahvistus
- $\tau$  on systeemin aikavakio

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Impulssivaste:} \quad y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \text{Askelvaste:} \quad y(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{array} \right.$$

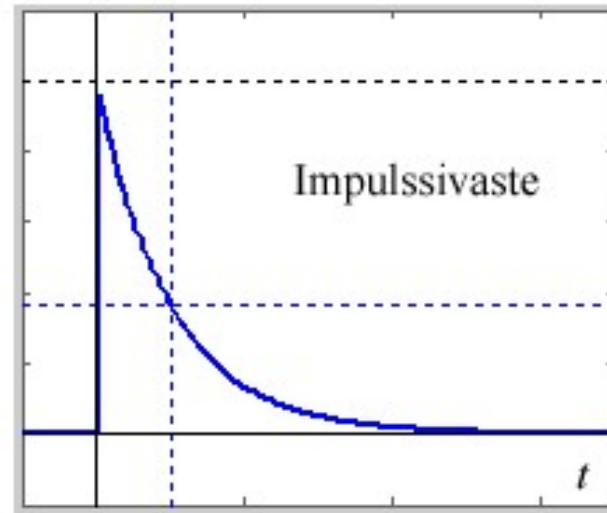




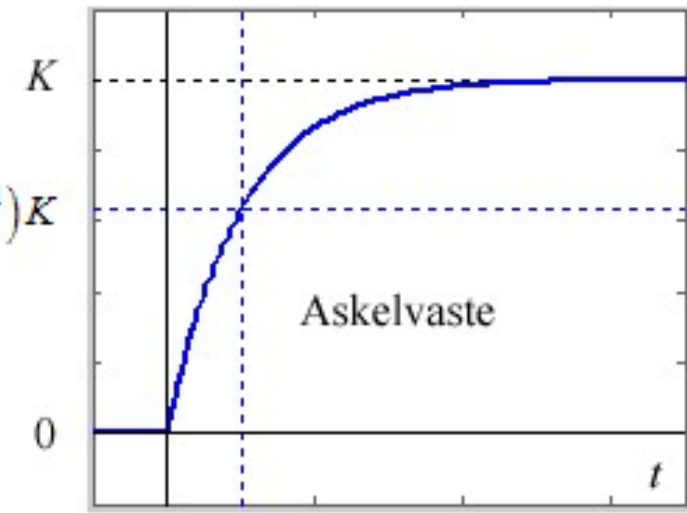
# Yleiset siirtofunktioimallit: 1. kertaluku

$\tau > 0 \Rightarrow$   
Stabiili

$$e^{-1}(K/\tau)$$

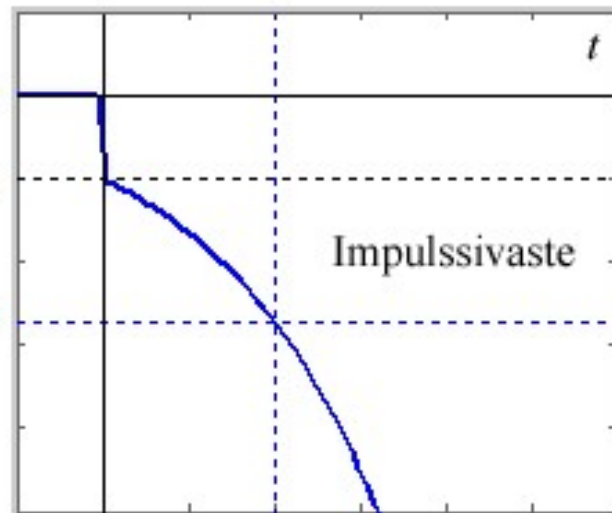


$$(1 - e^{-1})K$$

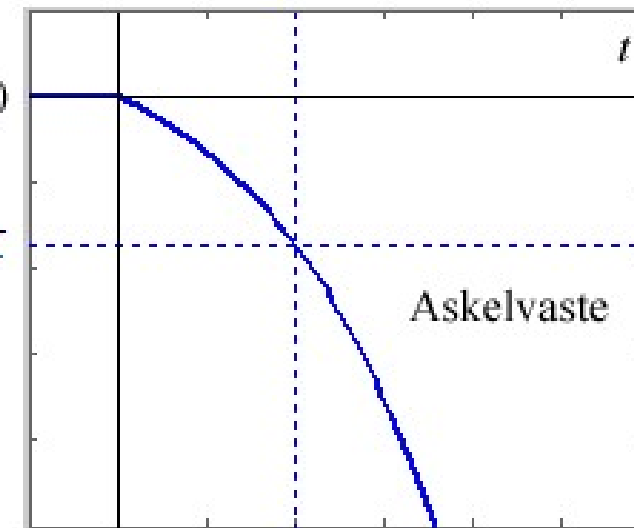


$\tau < 0 \Rightarrow$   
Epästabiili

$$e(K/\tau)$$



$$(1 - e)K$$



# Yleiset siirtofunktioimallit: 2. kertaluku

- 2. kertaluvun värähtelevä dynamiikka (kompleksiset navat)

- Differentiaaliyhtälö ja siirtofunktio:  $\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t)$ 
  - $K$  on systeemin vahvistus
  - $\omega_n$  on systeemin ominaistaajuus ( $\omega_n > 0$ )
  - $\zeta$  on systeemin vaimennussuhde ( $-1 > \zeta > 1$ )

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Impulssivaste:  $y(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \left( \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right) \right)$

Askelvaste:  $y(t) = K \left( 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right) \right) \right)$

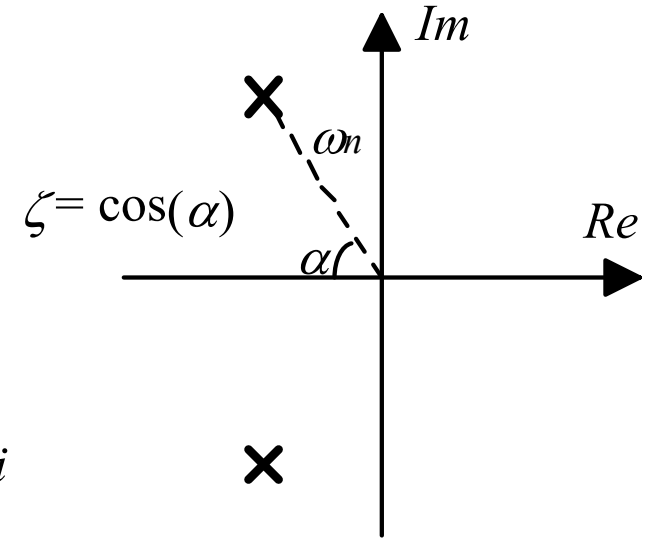
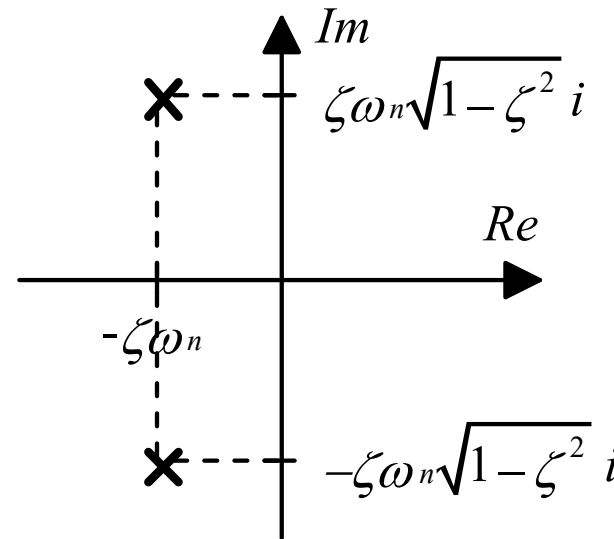
$$= K \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \left( \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t\right) + \cos^{-1}(\zeta) \right) \right)$$

# Yleiset siirtofunktioimallit: 2. kertaluku

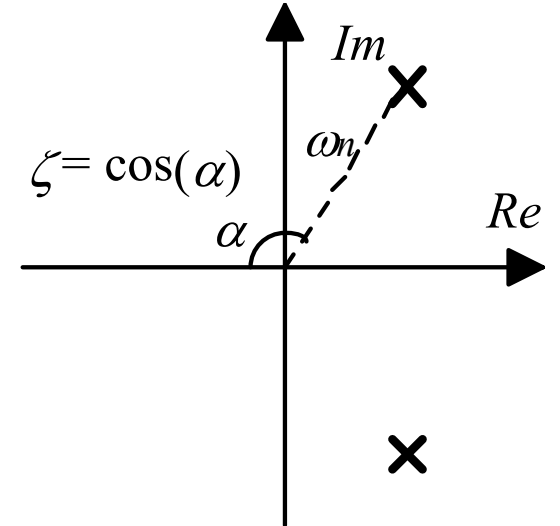
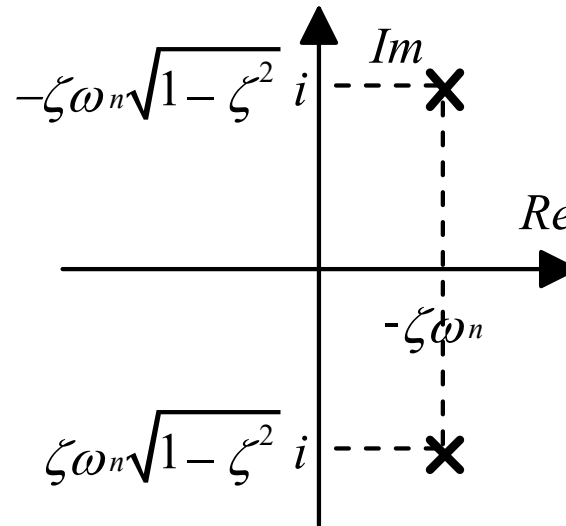
Navat:

$$\begin{cases} s_{P,1} = -\omega_n \zeta + \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} i \\ s_{P,2} = -\omega_n \zeta - \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} i \end{cases}$$

$0 > \zeta > 1 \Rightarrow$   
Stabiili

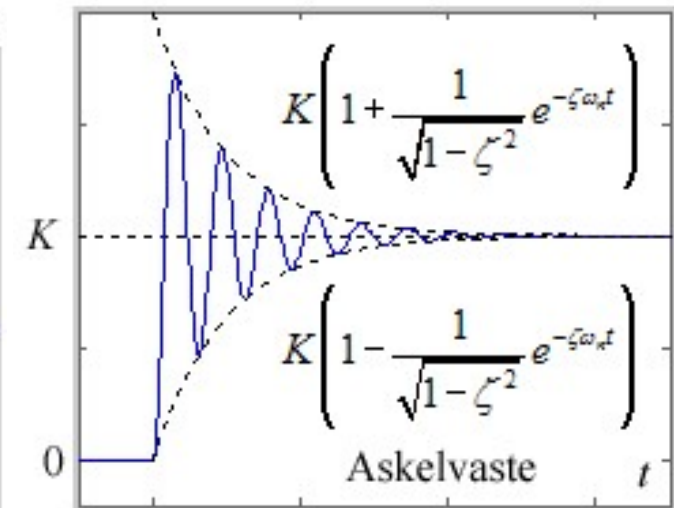
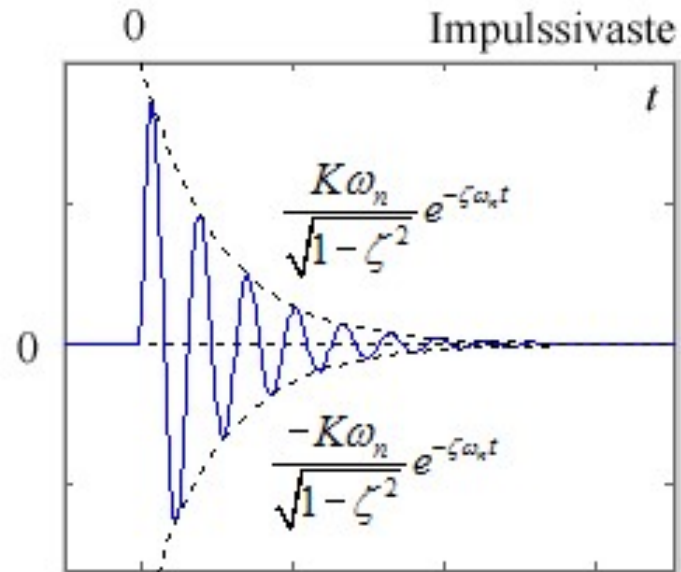


$-1 > \zeta > 0 \Rightarrow$   
Epästabiili

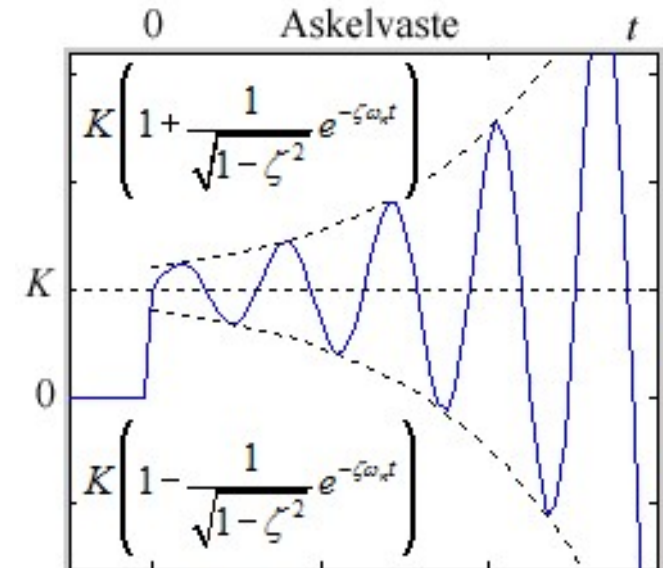
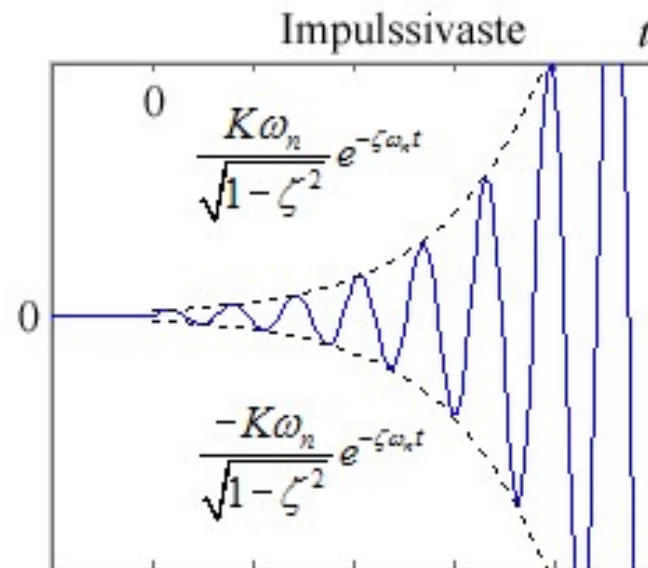


# Yleiset siirtofunktioimallit: 2. kertaluku

$0 > \zeta > 1 \Rightarrow$   
Stabiili



$-1 > \zeta > 0 \Rightarrow$   
Epästabiili



# Yleiset siirtofunktioimallit: 2. kertaluku

- 2. kertaluvun värähtelemätön dynamiikka (reaaliset navat)

- Differentiaaliyhtälö ja siirtofunktio:

$$\tau_1\tau_2\ddot{y}(t) + (\tau_1 + \tau_2)\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$

- $K$  on systeemin vahvistus

- $\tau_1$  ja  $\tau_2$  ovat systeemin aikavakiot ( $\tau_1 \neq \tau_2$ )

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$\text{Impulssivaste: } y(t) = \frac{K}{\tau_2 - \tau_1} \left( e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$$

$$\text{Askelvaste: } y(t) = K \left( 1 - \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \right)$$

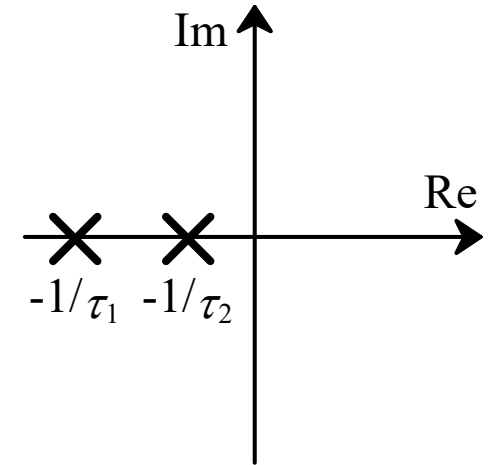
- Luonnollisesti värähtelevät systeemit voidaan myös formuloida tähän mallirakenteeseen, mutta silloin aikavakiot ovat kompleksisia – Toisaalta värähtelemättömät systeemit voidaan formuloida käyttäen vaimennussuhdetta ja ominaistajuutta, mutta tällöin vaimennussuhteen itseisarvo on ykköstä suurempi (ylivaimennettu systeemi)

# Yleiset siirtofunktiomallit: 2. kertaluku

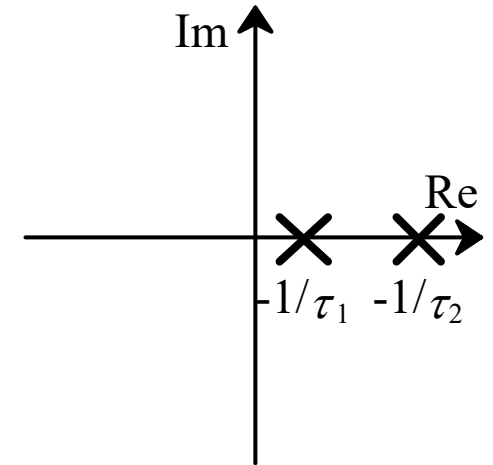
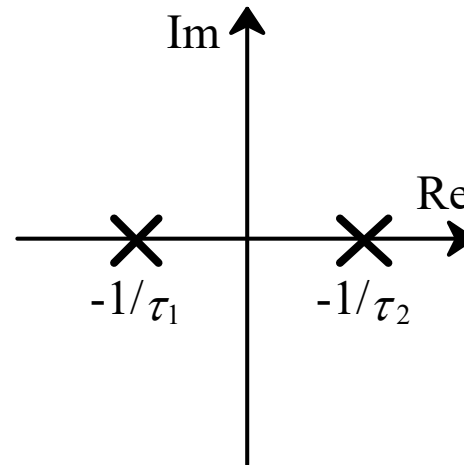
Navat:

$$\begin{cases} s_{P,1} = -\frac{1}{\tau_1} \\ s_{P,2} = -\frac{1}{\tau_2} \end{cases}$$

$\tau_1, \tau_2 > 0$   
 $\Rightarrow$  Stabiili

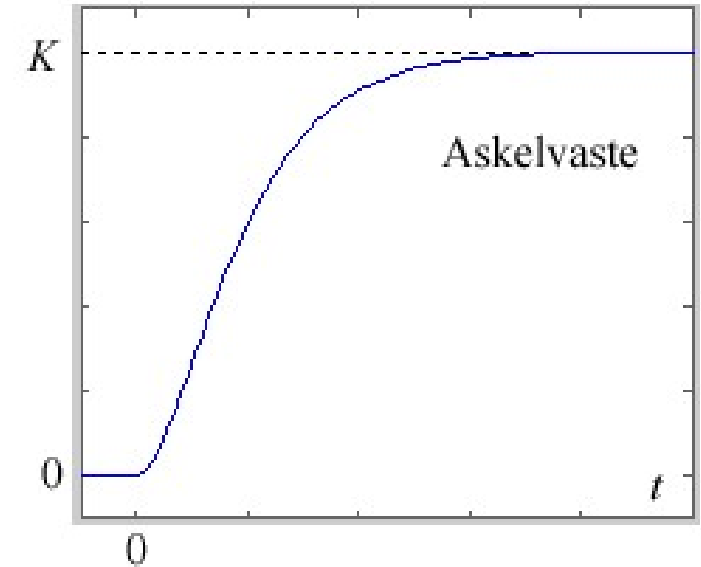
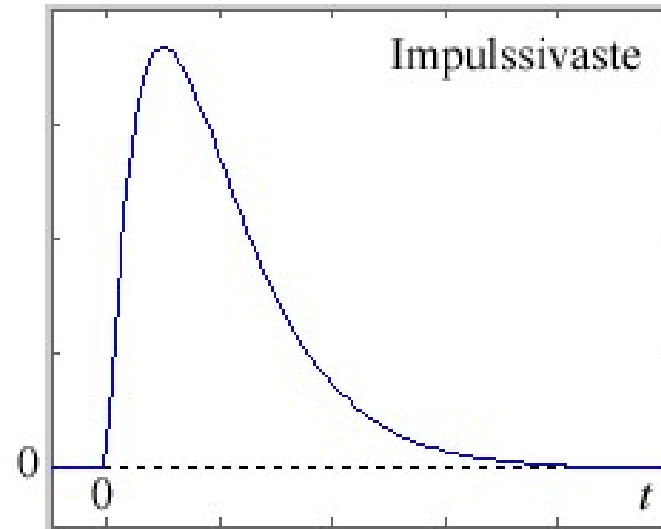


$\tau_1 < 0$  tai  $\tau_2 < 0$   
 $\Rightarrow$  Epästabiili

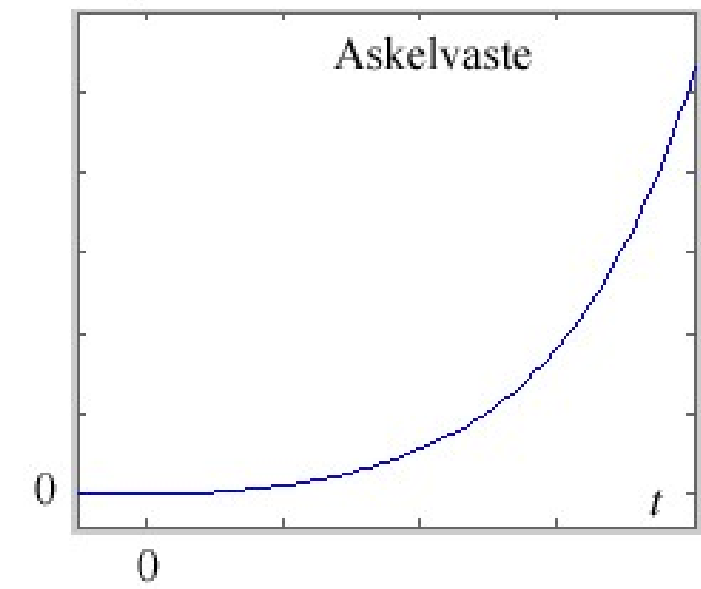
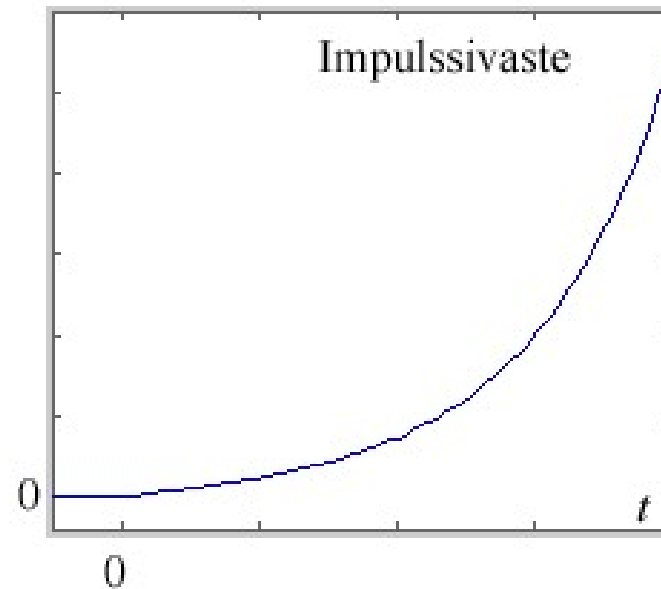


# Yleiset siirtofunktioimallit: 2. kertaluku

$\tau_1, \tau_2 > 0$   
=> Stabiili



$\tau_1 < 0$  tai  $\tau_2 < 0$   
=> Epästabiili



# Korkeamman kertaluvun mallit

---

- Korkeamman kertaluvun mallit voidaan koota yksinkertaisista 1. ja 2. kertaluvun elementeistä
  - Tiedetään, että vaste on kaikkien elementtien painotettu summa (lähellä imaginääriakselia olevat navat ja nollat dominoivat käyttäytymistä, jolleivät napa-nollaparit kumoa toistensa vaikutuksia)
  - Tarkastellaan kolmannen kertaluvun värähtelevää systeemiä

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

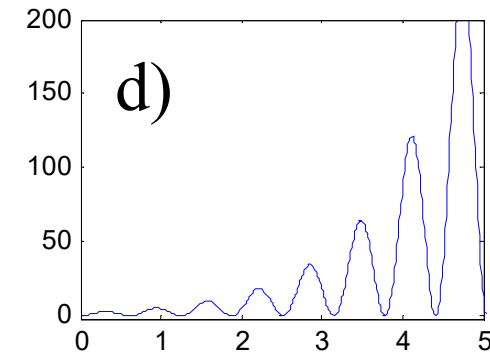
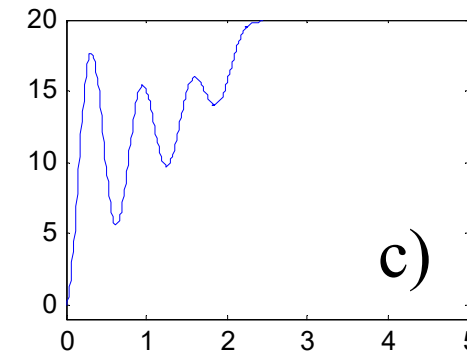
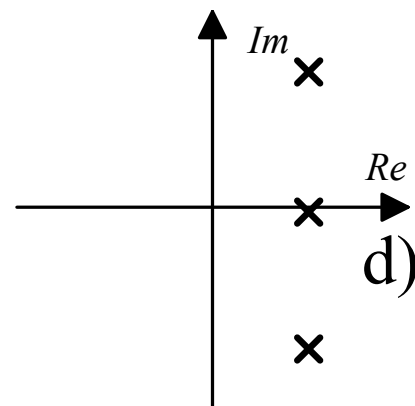
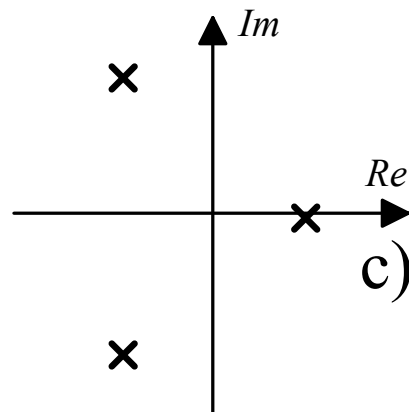
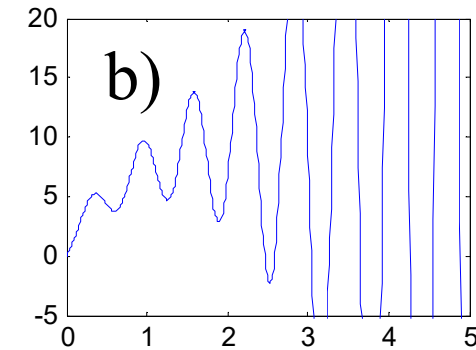
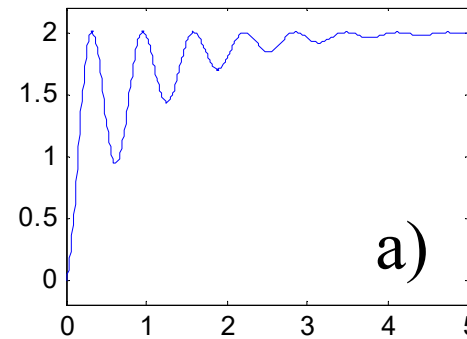
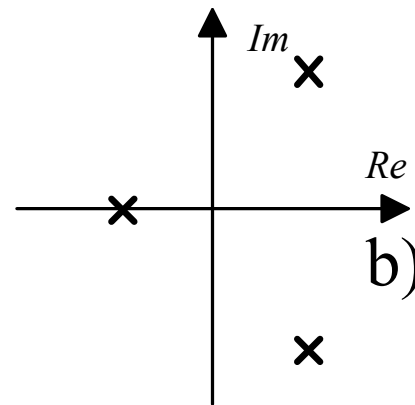
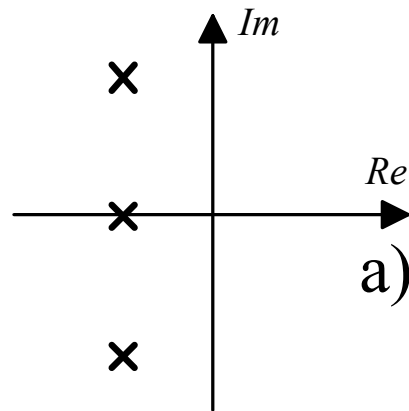
- Tämän järjestelmän käyttäytyminen on painotettu summa toisen kertaluvun käyttäytymisestä ja ensimmäisen kertaluvun käyttäytymisestä.

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{A}{\tau s + 1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

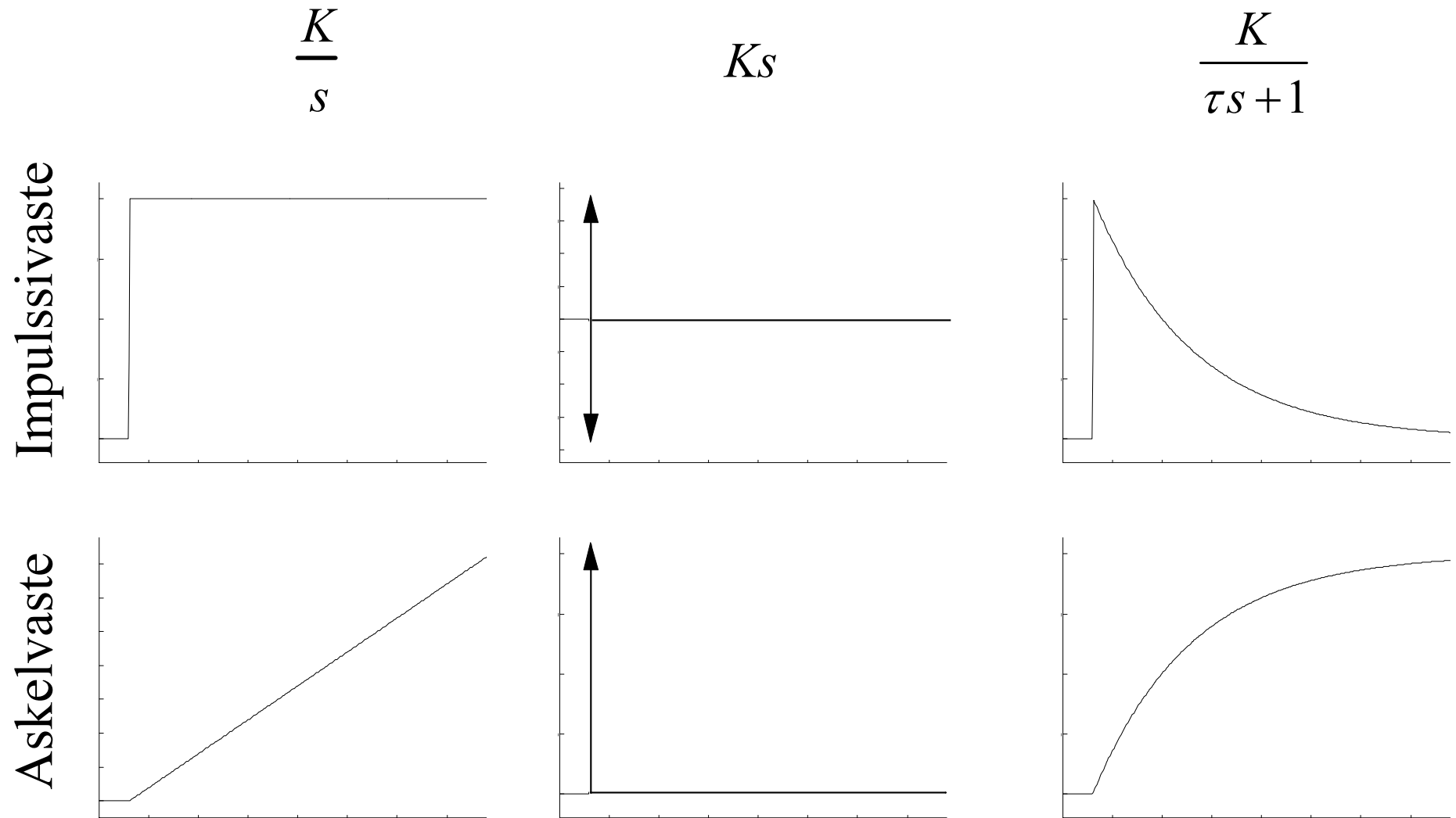


# Korkeamman kertaluvun mallit

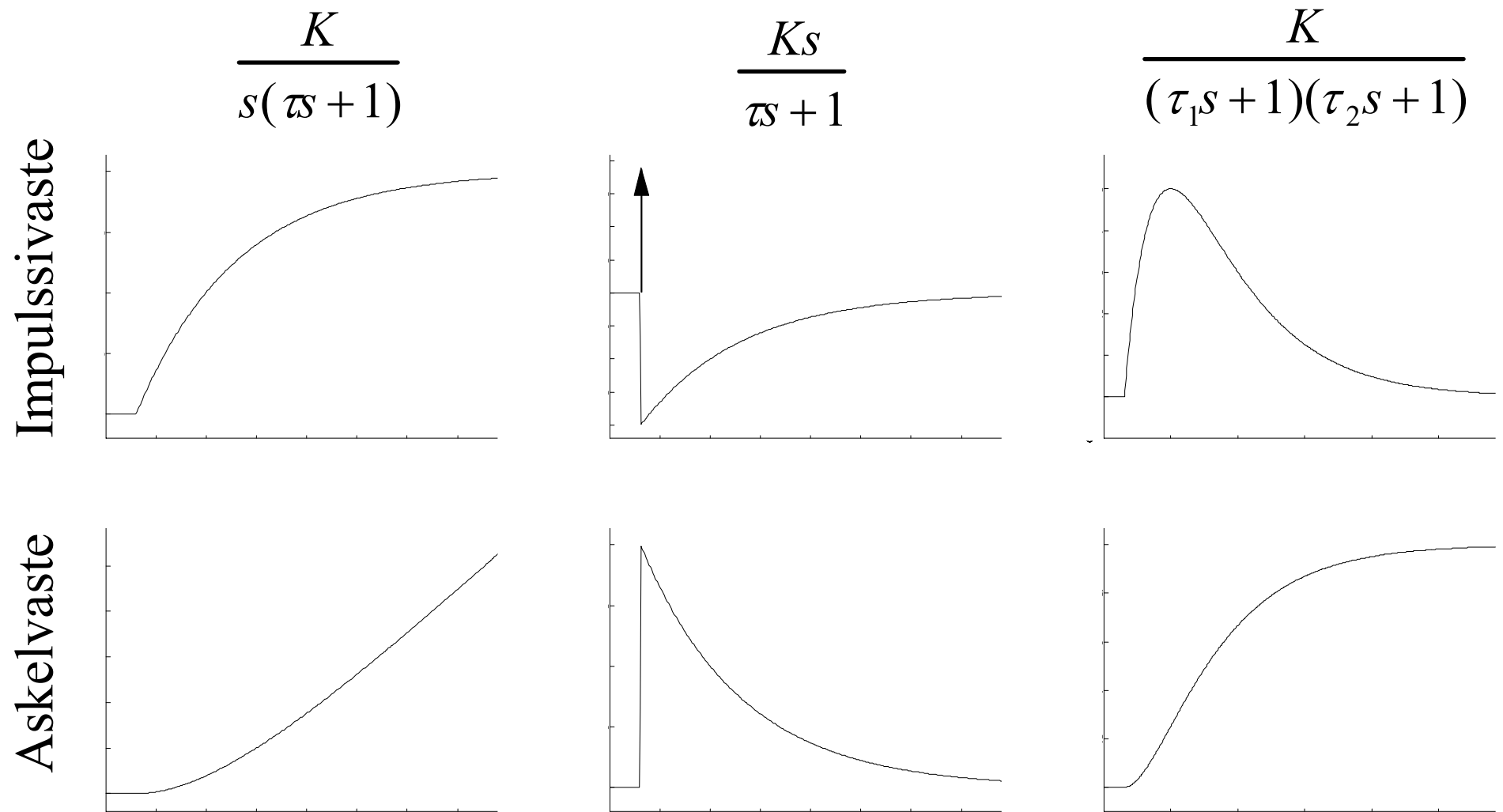
- Alla on systeemin napa-nollakuviot ja askelvasteet eräillä parametriarvoilla



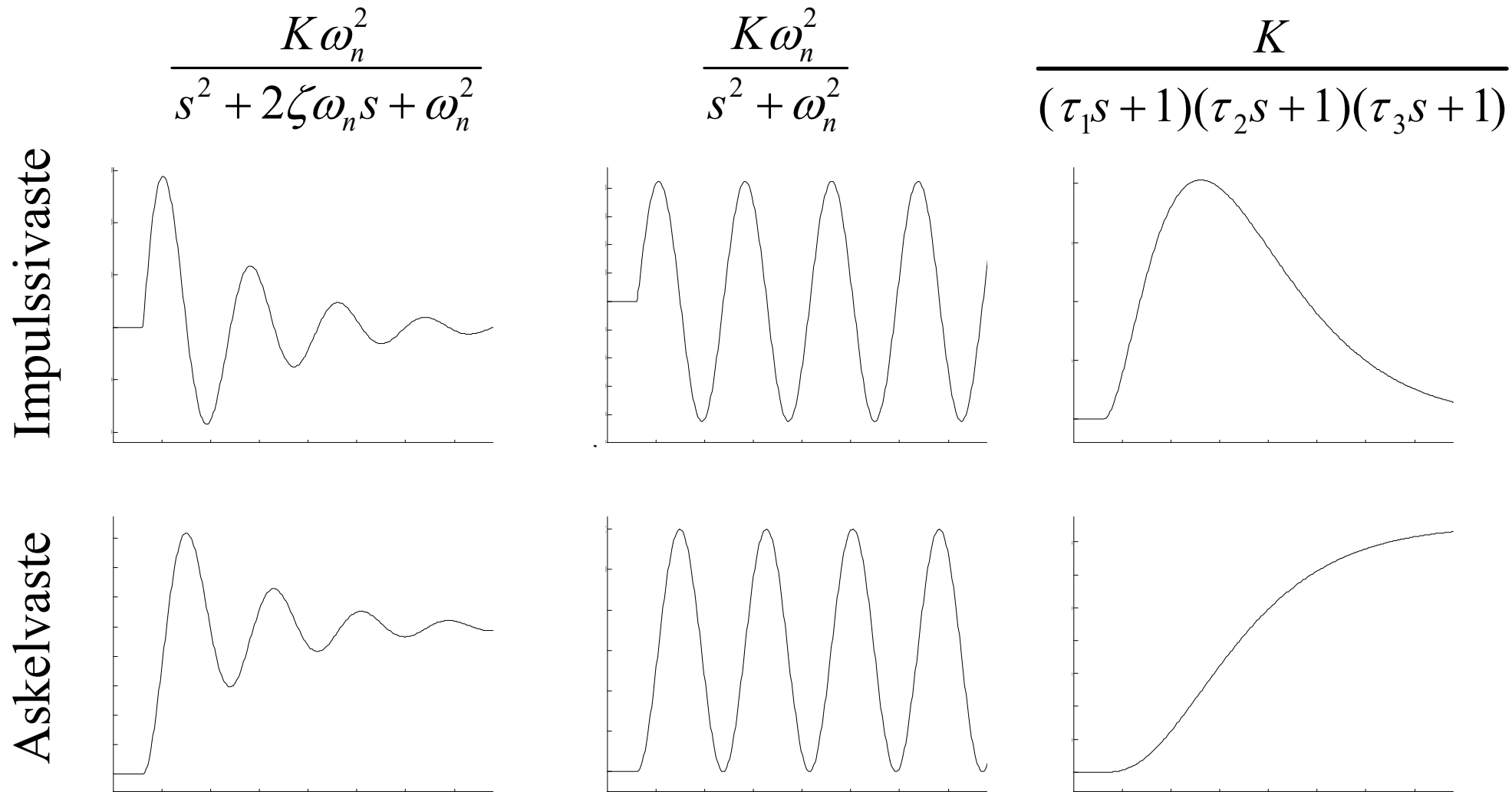
# Yksinkertaisten systeemien vasteita



# Yksinkertaisten systeemien vasteita



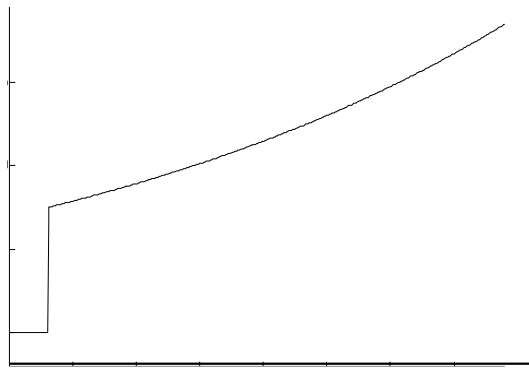
# Yksinkertaisten systeemien vasteita



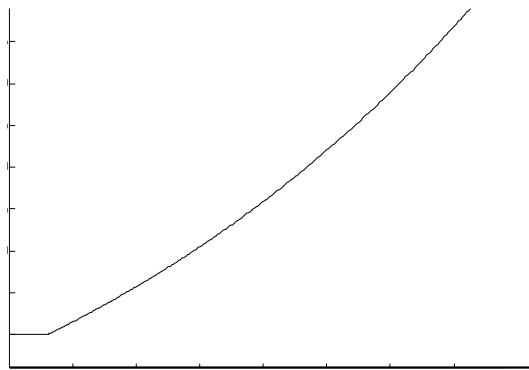
# Yksinkertaisten systeemien vasteita

Impulssivaste

$$\frac{K}{\tau s - 1}$$



Askelvaste



$$\frac{K \omega_n^2}{s^2 - 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

