Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Vättö
Harjoitukset, Viikko 4B, 2024

Määritelmistä

TEHTÄVÄ M1 Etsi vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion

$$f(x, y, z) = (x^2 + yz,\ 2ze^x,\ x \ln y)$$

Jacobin matriisi. Laske funktion differentiaali pisteessä $(0, 1, -2)$, kun $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$.

TEHTÄVÄ M2 Mihin suuntiin funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \text{ kun } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0,$$

origossa muodostettu suunnattu derivaatta on olemassa? Onko f differentioituva origossa?

Johdanto

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavien funktioiden suunnatut derivaatat annettuihin suuntiin annetuissa pisteissä:

a) $f(x, y) = e^{x+y}, \quad \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (0, 0)$,
b) $f(x, y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y^2), \quad \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad (1, 2)$,
c) $f(x, y, z) = xy^2z^3, \quad 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad (-3, 2, 1)$,
d) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3, \quad \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad (3, -1, 4)$.

TEHTÄVÄ J2 Laske kohdassa a) vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion Jacobin matriisi ja kohdassa b) Taylorin polynomi

$$\text{a) } f(x,y,z) = \left(xe^{-yz},\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y},\ \sqrt{x}z^2\right),$$
$$\text{b) } f(x,y) = 2x^4 - 5y^3 + 2xy^2,\ \text{keskus} = (0,0),\ \text{aste} = 3.$$

Kotitehtävät

TEHTÄVÄ K1 Etsi pisteet, joissa funktion $f(x,y,z) = xy + \cos x + y^2 z$ gradientti on yz-tason suuntainen.

TEHTÄVÄ K2 Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3$. Tutki, mihin suuntaan pisteestä $(3,-1,4)$ on edettävä, jotta a) funktio kasvaisi mahdollisimman nopeasti, b) funktio ei kasvaisi lainkaan. Mikä on funktion derivaatta nopeimman kasvun suuntaan?
Ratkaisu: Derivaatta nopeimman kasvun suuntaan $\sqrt{5669} \approx 75.29$.

Haaste

Tarkastellaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä $yu_x - xu_y = 0$, kun $u = u(x,y)$. Olkoon
$$U(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
ratkaisun esitys napakoordinaateissa.
a) Laske U_r, U_φ ja ratkaise osittaisderivaatat u_x ja u_y niiden avulla lausuttuna.
b) Osoita alkuperäisen yhtälön avulla, että $U_\varphi = 0$ ja totea, että kaikki ratkaisut u ovat radiaalisia.

Vastauksia

TEHTÄVÄ J1
Ratkaisu: a) $\sqrt{2}$; b) $-\pi/\sqrt{5}$; c) $-60/7$; d) $155/\sqrt{6}$.
TEHTÄVÄ J2
Ratkaisu: a) $\begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -y/x^2 & 1/x - z/y^2 & 1/y \\ z^2/(2\sqrt{x}) & 0 & 2\sqrt{x}z \end{pmatrix}$; b) $2xy^2 - 5y^3$.