

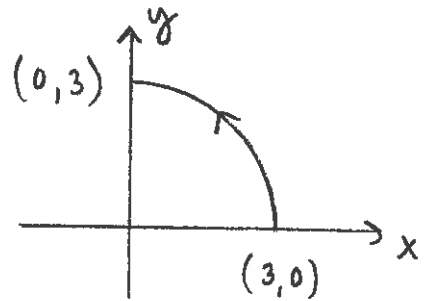
$$\underline{3. a)} \quad x = (1-t)x_0 + tx_1 = t-1+5t = \underline{\underline{6t-1}}$$

$$y = (1-t)y_0 + ty_1 = 2-2t+4t = \underline{\underline{2t+2}}$$

$$z = (1-t)z_0 + tz_1 = 1-t-2t = \underline{\underline{-3t+1}}$$

$$b) \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [-2, 1]$$

$$c) \quad \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$



d) VASTAKKAINEN SUUNTA: OPERANTIO $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ VAIHTAA $0 \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 3 \sin t \\ y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 3 \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2]$$

TARKISTUS $x(0) = 0, y(0) = 3$

$$x(\pi/2) = 3, y(\pi/2) = 0$$

M1

$$(a) \quad x = \cos t \quad y = \sin t \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(b) \quad x = \sin t^2 \quad y = \cos t^2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq (2\pi)^{1/2}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x = \cos(\pi u + 1) \\ y = \sin(\pi u + 1) \end{cases} \quad ; \quad u \in [-1, 1]$$

$$(d) \quad \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t\sqrt{2 - t^2} \end{cases} \quad ; \quad t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

M2

$$x = t^3 + 1$$
$$y = 1 - t^3$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 1, \quad \frac{dy}{dt} = -3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3t^2}{3t^2 + 1} \Big|_{t=1} = -\frac{3}{4}$$

TEHTÄVÄ J1 Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)} \mathbf{i} + \frac{t}{t + 1} \mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaak- tai pystysuora.

Ratkaisu: Asymptootit $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$;

pystysuora tangentti pisteissä $(\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), -1/\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1), 1/\sqrt{2})$.

RATKAISU Suoraviivaiset asymptootit ovat suoria, joita käyrä \mathbf{r} lähestyy, kun $\|\mathbf{r}(t)\| \rightarrow \infty$. Koska koordinaattifunktiot

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)} \quad \text{ja} \quad y(t) = \frac{t}{t + 1}$$

ovat rationaalifunktioita, voidaan rajoittaa tarkastelu parametrin t arvoihin, joilla ainakin toisen koordinaattifunktion nimittäjä kasvaa rajatta tai osoittaja lähestyy nollaa.

- Havaitaan, että $\lim_{t \rightarrow 1^+} x(t) = -\infty$ ja $\lim_{t \rightarrow 1^-} x(t) = \infty$. Toisaalta

$$\lim_{t \rightarrow 1} y(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{t + 1} = \frac{1}{2}.$$

Näin ollen yksi käyrän asymptoteista on $y = 1/2$.

- Vastaavasti havaitaan, että $\lim_{t \rightarrow -1^+} y(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow -1^-} y(t) = -\infty$ ja

$$\lim_{t \rightarrow -1} x(t) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + 1}{4(1 - t)} = \frac{1}{4}.$$

Siten käyrällä on myös asymptootti $x = 1/4$.

- Lisäksi $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\infty$ ja $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \infty$. Toisaalta

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 + 1/t} = 1,$$

joten myös suora $y = 1$ on käyrän asymptootti.

Käyrällä on pystysuora tangentti ainoastaan pisteissä, joissa $x'(t) = 0$ ja $y'(t) \neq 0$. Ratkaistaan tangenttivektorin x -komponentin nollakohdat:

$$\begin{aligned} x'(t) = \frac{-t^2 + 2t + 1}{4(1-t)^2} = 0 &\Leftrightarrow -t^2 + 2t + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Toisaalta y -komponentin derivaatta

$$y'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \neq 0$$

kaikilla parametrin t arvoilla. Näin ollen käyrällä on pystysuorat tangentit pisteissä

$$\mathbf{r}(1 + \sqrt{2}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

ja

$$\mathbf{r}(1 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

Vastaavasti vaakasuoran tangentin olemassaolo edellyttäisi, että $y'(t) = 0$. Kuitenkin jo edellä havaittiin, ettei tämä toteudu millään parametrin t arvoista. Tästä seuraa, ettei käyrällä voi olla vaakasuoria tangenteja.

Piirto esim. Maple:

```
plot([(t^2+1)/(4(1-t)), t/(t+1), t = -infinity..infinity])
```

TEHTÄVÄ J2

- a) Laske pituus ruuviviivankaarelle $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$,
 $t \in [0, 2\pi]$.
- b) Johda ellipsin kehän pituudelle lauseke

$$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt,$$

missä a on ellipsin ison akselin puolikas ja e eksentrisyys. Integraalia ei voida laskea alkeisfunktioiden avulla.

Ratkaisu: a) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

RATKAISU

- a) Tangenttivektoriksi saadaan

$$\mathbf{r}'(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}$$

ja tälle normi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Kaarenpituus on siten

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

- b) Ellipsillä, jonka polttopisteet ovat x -akselilla, on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}, \text{ kun } t \in [0, 2\pi],^1$$

Lisäksi ellipsin eksentrisyydelle pätee²

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \geq 0 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2.$$

¹Tässä a on puolet ellipsin isoakselin pituudesta ja b puolet pikkuakselin pituudesta.

²Voi toki halutessaan myös johtaa: Eksentrisyys määritellään ellipsin polttopisteiden välisen etäisyyden suhteena isoakselin pituuteen.

Ratkaistaan ensin tangenttivektorin normi:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= -a \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j} \\ \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \\ &= a \sqrt{\sin^2 t + (b^2/a^2) \cos^2 t} \\ &= a \sqrt{\sin^2 t + (1 - e^2) \cos^2 t} \\ &= a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}.\end{aligned}$$

Siten ellipsin kaarenpituus on

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt$$