TEHTÄVÄ V1 Olkoon

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}, \text{ kun } (x,y) \neq (0,0).$$

a) Tutki funktion raja-arvoja origossa pitkin suoria $y = kx$, $k > 0$.
b) Tutki a-kohdan tapaan raja-arvoja pitkin paraabeleja $y = kx^2$.
c) Voidaanko $f(0,0)$ määritellä niin, että funktio on jatkuva origossa?

RATKAISU

a) Suoralla $y = kx$ on parametrisointi $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + kt\mathbf{j}$, joka lähestyy origoa, kun $t \to 0$. Siten

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+(kt)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2+k^2} = 0,$$

Raja-arvo ei siis tässä tapaukesssa riipu valitusta suorasta.

b) Vastaavasti paraabelilla $y = kx^2$ on parametrisointi $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}+kt^2\mathbf{j}$, joka myös lähestyy origoa, kun $t \to 0$. Tällöin

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4+(kt^2)^2} = \frac{1}{1+k^2}$$

Näin ollen paraabelin valinnalla on vaikutusta raja-arvoon.

c) Ei voida, sillä b-kohdassa saatu tulos implikoi, ettei funktiolla ole origossa yksikäsitteistä raja-arvoa. Voidaan myös havaita, että

$$\frac{1}{1+k^2} \neq 0,$$

kaikilla $k > 0$, joten paraabeleja pitkin kuljettaessa raja-arvo ei koskaan vastaa suoria pitkin saavutettua arvoa.

TEHTÄVÄ V2 Funktio $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ olkoon jatkuva pisteessä (x_0, y_0, z_0). Määritellään funktio $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla $g(x, y) = f(x, y, z_0)$. Todista, että g on jatkuva pisteessä (x_0, y_0).

Ratkaisu: Käytä $\epsilon\delta$-tekniikkaa ja tarkastele etäisyyttä $|g(x, y) - g(x_0, y_0)|$.

RATKAISU Olkoot $\epsilon > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä (x_0, y_0, z_0) voidaan $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ valita siten, että

$$|f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| < \epsilon,$$

kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, joille epäyhtälö

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

on voimassa.

Toisaalta, jos (x, y, z) on mikä tahansa piste, joka toteuttaa edelliset epäyhtälöt, niin myös piste (x, y, z_0) toteuttaa molemmat epäyhtälöistä, sillä

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

kaikilla $z \in \mathbb{R}$. Näin ollen

$$|g(x, y) - g(x_0, y_0)| = |f(x, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)| < \epsilon,$$

kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, joilla $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Siten myös g on jatkuvuuden määritelmän mukaan jatkuva pisteessä (x_0, y_0).