

Viikko 3 : Alkuvuoro

$$M1 \& M2 : f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x-y)(x+y)}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y} \text{ suoran } x=y \text{ ulkopuolella.}$$

$$\text{Sisärajankäynti omissaan lim}_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

(Huom! $f(x,y)$ on määritelty kaikissa $(1,1)$:n ympäristöissä. Suoran $x=y$ "välttäminen" pois ei vaikuta.)

Jatkuvuus ko. pisteinä siis selvitetään.

Lisäksi asettamalla $f(x,y) = \frac{1}{2x}$, kun $x=y$ (paitsi origossa) f on jatkuva.

Funktiota ei voi seattaa jatkuvaksi suoralla $y = -x$:

$$|f(x,y)| = \frac{1}{|x+y|} \rightarrow \infty, \text{ kun } y \rightarrow -x.$$

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Todista, että seuraavilla kahden reaaliuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla on raja-arvo origossa ja määritä tämä:

$$\text{a) } \frac{(1 + y^2) \sin x}{x}, \quad \text{b) } \frac{x \tan y}{y}.$$

Ratkaisu: a) 1; b) 0.

RATKAISU Kumpikin tehtävässä annetuista funktioista on muotoa $f(x, y) = g(x)h(y)$, joten voimme käyttää hyödyksi tietoa:

Jos $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = a$ ja $\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = b$, niin $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = ab$.

a) Valitaan

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{ja} \quad h(y) = 1 + y^2,$$

jolloin

$$g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ja

$$h(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y^2) = 1.$$

Näin ollen myös tulon raja-arvo on olemassa ja se on

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 + y^2) \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 1 \cdot 1 = 1.$$

b) Vastaavasti valitaan

$$g(x) = x \quad \text{ja} \quad h(y) = \frac{\tan y}{y}.$$

Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

ja

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} \right) = 1.$$

Siten

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \tan y}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0 \cdot 1 = 0.$$

TEHTÄVÄ J2 Funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0, 0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\text{a) } \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, \quad \text{b) } \frac{xy(x^3 + y)}{x^4 + y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?

Ratkaisu: a) Ei voida; b) $a = 0$.

RATKAISU

- a) Tämä funktio on esimerkki tapauksesta, jossa funktiolla ei välttämättä ole tarkastelupisteessä raja-arvoa, vaikka jokaista suoraa pitkin lähestyttäessä raja-arvo olisikin sama. Nimittäin, jos origoa lähestytään pitkin suoraa (t, kt) saadaan

$$f(t, kt) = \frac{t^2 \cdot kt}{t^4 + (kt)^2} = \frac{kt^3}{t^2(t^2 + k^2)} = \frac{kt}{t^2 + k^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t, kt) = 0, \text{ kaikilla } k \in \mathbb{R}.$$

Toisaalta, jos origoa lähestytään pitkin paraabelinkaarta (t, kt^2) , niin

$$f(t, kt) = \frac{t^2 \cdot kt^2}{t^4 + (kt^2)^2} = \frac{kt^4}{t^4(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}$$

$$\Rightarrow_{t \rightarrow 0} f(t, kt) = \frac{k}{1 + k^2},$$

eli raja-arvo riippuu tällöin paraabelin valinnasta. Näin ollen funktiolla ei ole raja-arvoa origossa, eikä lukua a voida valita s.e. funktiosta saataisiin jatkuva.

- b) Osoitetaan, että funktion raja-arvo origossa on nolla. Havaitaan,

että

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{xy(x^3 + y)}{x^4 + y^2} - 0 \right| &= \left| \frac{x^4y + xy^2}{x^4 + y^2} \right| \\
 &= \frac{|x^4y + xy^2|}{x^4 + y^2} \\
 \text{kolmioepäyhtälö} \quad &\leq \frac{|x^4y| + |xy^2|}{x^4 + y^2} \\
 &= \frac{x^4|y| + |x|y^2}{x^4 + y^2} \\
 x^4 \leq x^4 + y^2, \quad y^2 \leq x^4 + y^2 \quad &\leq \frac{(x^4 + y^2)|y| + |x|(x^4 + y^2)}{x^4 + y^2} \\
 (*) \quad &= |x| + |y| \\
 |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad &\leq 2\sqrt{x^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

(*) Loppu voidaan tietysti myös päätellä jo tästä tutkimalla puo-
littain yhtälön raja-arvoa, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Formaalisti: Olkoot $\epsilon > 0$ ja $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon/2$. Tällöin edelli-
sen päättelyn nojalla pätee

$$\left| \frac{xy(x^3 + y)}{x^4 + y^2} - 0 \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Määritelmän mukaan funktiolla on tällöin origossa raja-arvo ja
se on nolla. Siten funktiosta voidaan tehdä jatkuva valitsemalla
 $a = 0$.