TEHTÄVÄ V1 Määritä pisteen a) $(2,3,6)$, b) $(3,3,1)$ kautta kulkeva pinnan $z = xy$ normaali.

Ratkaisu: a) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}+t(3\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$, lisäksi kaksi muuta, b) kolme ratkaisua; $\mathbf{r} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}+t(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})$, $\mathbf{r} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}+t(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})$, $\mathbf{r} = \sqrt[3]{3}\mathbf{i}+\sqrt[3]{3}\mathbf{j}+\sqrt[3]{9}\mathbf{k}+t(\sqrt[3]{3}\mathbf{i}+\sqrt[3]{3}\mathbf{j}-\mathbf{k})$

RATKAISU Merkitään $z = f(x,y) = xy$. Ratkaistaan aluksi pinnan normaalivektori:

$$\mathbf{N} = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j} - \mathbf{k} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Toisaalta pinnan normaalit voidaan määritellä kaavalla

$$\mathbf{r}_0 + t\mathbf{N}(x,y)$$

missä $\mathbf{r}_0 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$ ja $t \in \mathbb{R}$. Näin ollen normaalit ovat tässä tapauksessa muotoa

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k} + t(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - \mathbf{k}) = (x - ty)\mathbf{i} + (y + tx)\mathbf{j} + (xy - t)\mathbf{k}.$$

Seuraavaksi täytyy määrittää parametrien x, y ja t arvot, joilla normaalit kulkevat annettujen pisteiden kautta.

a) Kaikki kolme normaalia voitaisiin nyt ratkaista yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x + ty = 2 \\ y + tx = 3 \\ xy - t = 6 \end{cases}$$

Tässä kuitenkin helpottaa huomattavasti havaita, että piste $(2,3,6)$ on pinnalla $z = xy$, joten yksi yhtälöryhmän ratkaisu täytyy olla $t = 0, x = 2$ ja $y = 3$. Siten yksi pisteen $(2,3,6)$ kautta kulkeva pinnan normaali on

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k} + t(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(3\mathbf{j} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

b) Vastaavasti tässä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + ty = 3 \\ y + tx = 3 \\ xy - t = 1 \end{cases}$$

Viimeisestä yhtälöstä seuraa $t = xy - 1$ ja tällöin ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} & y + tx = x + ty \\ \Leftrightarrow \quad & y + (xy-1)x = x + (xy-1)y \\ \Leftrightarrow \quad & y + x^2y - x = x + xy^2 - y \\ \Leftrightarrow \quad & x^2y - 2x + 2y - xy^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & xy(x-y) - 2(x-y) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-y)(xy-2) = 0. \end{aligned}$$

Näin ollen joko $x = y$ tai $xy = 2$. Tarkastellaan tapauksittain:

- Tapaus $xy = 2$: Nyt $t = 1, y = 2/x$ ja

$$\begin{aligned} x + ty = 3 \Rightarrow x + \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ tai } x = 2 \end{aligned}$$

  Joten ratkaisuiksi saadaan $(x, y) = (2, 1)$ ja $(x, y) = (1, 2)$.
- Tapaus $x = y$: Nyt $t = x^2 - 1$ ja

$$x + ty = 3 \Rightarrow x + (x^2-1)x = x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}.$$

Pisteen $(3, 3, 1)$ kautta kulkevat pinnan normaalit ovat siten

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

ja

$$\mathbf{r} = \sqrt[3]{3}\mathbf{i} + \sqrt[3]{3}\mathbf{j} + \sqrt[3]{9}\mathbf{k} + t(\sqrt[3]{3}\mathbf{i} + \sqrt[3]{3}\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$