VIIKKO 4 LV

M1 f on vektoriarvoinen, tällöin myös differentiaali on vektori.

$$\underline{f}(x,y,z) = x^2 + yz\,\underline{i} + 2ze^x\,\underline{j} + x\ln y\,\underline{k}$$

$$J_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ 2ze^x & 0 & 2e^x \\ \ln y & \frac{x}{y} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{\underline{f}}\Big|_{(0,1,-2)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$d\underline{f} = A\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = -0.1\,\underline{i} - 0.2\,\underline{j}$$

Tässä on häikäilemättä vaihdettu $\mathbb{R}^3$:n pisteitä E^3:n vektoreiksi.

M2

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \qquad \text{kun } (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0.$$

Funktion f suunnattu derivaatta vektorin $\mathbf{u}$ suuntaan pisteessä $\mathbf{r}$ voidaan laskea suoraan määritelmästä

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{r} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{r})}{h}.$$

Valitaan $\mathbf{r} = (0,0)$ ja $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, jolloin kun $h \neq 0$ saadaan

$$\begin{aligned} &\frac{f(\mathbf{r} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{r})}{h} \\ &= \frac{f(h\mathbf{u})}{h} = \frac{u_1^2 u_2}{h^2 u_1^4 + u_2^2} \xrightarrow{h \to 0} \frac{u_1^2}{u_2}, \end{aligned}$$

kun $u_2 \neq 0$. Mikäli $u_2 = 0$, nähdään suoraan että suunnattu derivaatta on nolla. Suunnattu derivaatta on siis määritelty minkä tahansa (ei nolla)vektorin u suuntaan, eli suunnattu derivaatta on olemassa kaikkiin suuntiin. Osittaisderivaatat koordinaattiakselien suuntaan pisteessä $(0,0)$ saadaan erityistapauksina edellisestä laskusta, kun $\mathbf{u} = (1,0)$ tai $\mathbf{u} = (0,1)$, mistä seuraa

$$\nabla f(0,0) = \mathbf{0}.$$

~~[illegible], että funktio f ei ole edes jatkuva origossa (ks. [illegible]), joten f ei ole myöskään differentioituva origossa.~~
~~Tämä voidaan~~ myös vaihtoehtoisesti todeta differentioituvuuden ~~määritelmästä~~. Jotta funktio f olisi differentioituva origossa, tulee päteä

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) - \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{2}$$

Merkitään $\mathbf{h} = (h,k)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} &\frac{|f(\mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) - \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= \frac{|f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= \frac{h^2 |k|}{(h^4 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Lähestyttäessä origoa esimerkiksi paraabelia (h, h^2) pitkin, viimeisestä lausekkeesta seuraa

$$\frac{h^4}{2h^4\sqrt{h^2 + h^4}} = \frac{1}{2|h|\sqrt{1 + h^2}} \xrightarrow{h \to 0} \infty,$$

minkä johdosta (2) ei päde. Siispä f ei ole differentioituva origossa.

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavien funktioiden suunnatut derivaatat annettuihin suuntiin annetuissa pisteissä:

a) $f(x,y) = e^{x+y}, \quad \mathbf{i}+\mathbf{j}, \quad (0,0)$,
b) $f(x,y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y^2), \quad \mathbf{i}-2\mathbf{j}, \quad (1,2)$,
c) $f(x,y,z) = xy^2z^3, \quad 6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \quad (-3,2,1)$,
d) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3, \quad \mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}, \quad (3,-1,4)$.

Ratkaisu: a) $\sqrt{2}$; b) $-\pi/\sqrt{5}$; c) $-60/7$; d) $155/\sqrt{6}$.

RATKAISUT Funktion f suunnattu derivaatta vektorin $\mathbf{u}$ suuntaan pisteessä $\mathbf{x}_0$ on muotoa

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

a) Nyt $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. Tällöin funktion f gradientiksi saadaan

$$\nabla f(x,y) = e^{x+y}\,\mathbf{i} + e^{x+y}\,\mathbf{j} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{i}+\mathbf{j}.$$

Lisäksi

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}+\mathbf{j} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}.$$

Siten suunnattu derivaatta haluttuun suuntaan on

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{i}+\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

b) **Nyt $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$. Gradientti:**

$$\nabla f(x,y) = \pi\cos(\pi x)\cos(\pi y^2)\,\mathbf{i} - 2y\pi\cos(\pi x)\sin(\pi y^2)\,\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_0) = \pi\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\underbrace{\cos(4\pi)}_{=1}\,\mathbf{i} - 4\pi\cos(\pi)\underbrace{\sin(4\pi)}_{=0} = -\pi\mathbf{i},$$

ja suuntavektorin normi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}.$$

Siten kysytty derivaatta on

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = (-\pi\mathbf{i})\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}) = -\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

c) **Tässä $\mathbf{x}_0 = (-3, 2, 1)$. Gradientti:**

$$\nabla f(x,y,z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_0) = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 36\mathbf{k}$$

ja suuntavektorin normi:

$$\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{49} = 7.$$

Siten

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = (4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 36\mathbf{k})\cdot\frac{1}{7}(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -\frac{60}{7}.$$

d) **Tässä $\mathbf{x}_0 = (3, -1, 4)$. Gradientti:**

$$\nabla f(x,y) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + z^3)\,\mathbf{j} + 3yz^2\,\mathbf{k} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{i} + 58\mathbf{j} - 48\mathbf{k}.$$

Suuntavektorin normi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}.$$

Tällöin suunnatuksi derivaataksi saadaan

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{i} + 58\mathbf{j} - 48\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{155}{\sqrt{6}}.$$

Tehtävä J2 Laske kohdassa a) vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion Jacobin matriisi ja kohdassa b) Taylorin polynomi

a) $f(x, y, z) = (xe^{-yz},\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y},\ \sqrt{x}z^2)$,

b) $f(x, y) = 2x^4 - 5y^3 + 2xy^2$, **keskus** $= (0, 0)$, **aste** $= 3$.

Ratkaisu: a) $\begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -y/x^2 & 1/x - z/y^2 & 1/y \\ z^2/(2\sqrt{x}) & 0 & 2\sqrt{x}z \end{pmatrix}$; b) $2xy^2 - 5y^3$.

Ratkaisut

a) Vektoriarvoisen funktion $f \in \mathbb{R}^3$ Jacobin matriisi on muotoa

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 & \partial_z f_3 \end{pmatrix},$$

joten laskemalla kaikki matriisin alkiot (osittaisderivaatat jokaiselle funktion f komponentille) saadaan

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2} & \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{z^2}{2\sqrt{x}} & 0 & 2\sqrt{x}z \end{pmatrix}.$$

b) Lasketaan tarvittavat osittaisderivaatat:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 8x^3 + 2y^2 & f_y(x, y) &= -15y^2 + 4xy \\ f_{xx}(x, y) &= 24x^2 & f_{yy}(x, y) &= -30y + 4x \\ f_{xy}(x, y) &= 4y & & \\ f_{xxy}(x, y) &= 0 & f_{xyy}(x, y) &= 4 \\ f_{xxx}(x, y) &= 48x & f_{yyy}(x, y) &= -30. \end{aligned}$$

Kun $(x, y) = 0$ saadaan näistä

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= 0 & f_y(0, 0) &= 0 \\ f_{xx}(0, 0) &= 0 & f_{yy}(0, 0) &= 0 \\ f_{xy}(0, 0) &= 0 & & \\ f_{xxy}(0, 0) &= 0 & f_{xyy}(0, 0) &= 4 \\ f_{xxx}(0, 0) &= 0 & f_{yyy}(0, 0) &= -30. \end{aligned}$$

Onneksi löytyi paljon nollia! Funktion f 3. asteen Taylorin polynomiksi kehityskeskuksena $(0,0) = \mathbf{0}$ saadaan nyt

$$
\begin{aligned}
f(h,k) &\approx f(\mathbf{0}) + \mathbf{h}\cdot\nabla f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^2 f(\mathbf{0}) + \frac{1}{3!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^3 f(\mathbf{0}) \\
&= \underbrace{f(0,0)}_{=0} + (h\underbrace{f_x(0,0)}_{=0} + k\underbrace{f_y(0,0)}_{=0}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(h^2\underbrace{f_{xx}(0,0)}_{0} + \underbrace{2hkf_{xy}(0,0)}_{=0} + \underbrace{k^2 f_{yy}(0,0)}_{=0}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{6}\Big(h^3\underbrace{f_{xxx}(0,0)}_{=0} + 3h^2k\underbrace{f_{xxy}(0,0)}_{=0} + 3hk^2\underbrace{f_{xyy}(0,0)}_{=4} + k^3\underbrace{f_{yyy}(0,0)}_{=-30}\Big) \\
&= \frac{1}{6}(12hk^2 - 30k^3) = 2hk^2 - 5k^3
\end{aligned}
$$

tai

$$f(x,y) \approx 2xy^2 - 5y^3.$$

Polynomin Taylor on polynomi myös korkeammissa dimensioissa.