

# VIIKKO 5 AV

M1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a) \rho(A) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad (\text{trivial})$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2} \quad ; \quad \rho(A) = -(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$$

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$b) |A_{11}| = 2$$

$$|A_{22}| = 3$$

$$|A_{33}| = 4$$

$$A_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$M2 \quad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y$$

Napakoordinaateissa :

$$f(x, y) = r [ r(1 + \cos\theta \sin\theta) + \cos\theta - \sin\theta ]$$

Nyt  $f(-1, 1) = -1$  suhteellinen minimi.

Idea: Osoitetaan, että  $f > 0$  sopivan kiekon reunalla (ja ulkopuolella).

Tunnetut epäyhtälöt: kaikille  $\theta$

$$|\cos\theta \sin\theta| \leq \frac{1}{2}$$

$$|\cos\theta - \sin\theta| \leq \sqrt{2} \quad \left( \text{maksimi, kun } \theta = -\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Valitaan } r \geq 3 \Rightarrow f(x, y) \geq 3 \left[ 3 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) - \sqrt{2} \right] > 0$$

$r$ -säteen kiekon reunalla  $f > 0$ , sisepisteessä  $f = -1$ .  $f > 0$  myös kiekon ulkopuolella

$$\Rightarrow \min_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = -1$$

**TEHTÄVÄ J1** Etsi seuraaville funktioille  $f$  ne pisteet, joissa  $\text{grad } f = \mathbf{0}$ , ja tutki lokaalin ääriarvon esiintymistä:

a)  $y^4 + x^2 - 2xy$ ,      b)  $x^3 + xy + y^2 - 3x - 9y$ ,      c)  $x^4 + y^4 + 4xy - 2y^2$ .

**RATKAISU**

a) Gradientin

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2y, 4y^3 - 2x)$$

nollakohdat eli funktion kriittiset pisteet saadaan yhtälöparista

$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x = 0. \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä seuraa  $y = x$  ja sijoittamalla tämä jälkimmäiseen yhtälöön saadaan  $x(2x^2 - 1) = 0$ , eli  $x = 0$  tai  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Gradientilla on siten kolme nollakohtaa:  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$  ja  $(0, 0)$ .

Tutkitaan sitten Hessen matriisin

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoja funktion kriittisissä pisteissä.

- Kun  $(x, y) = (0, 0)$  saadaan

$$\det(\mathbf{H}_f(0, 0) - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda) - (-2)(-2) \\ = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Koska  $\lambda_+ > 0$  ja  $\lambda_- < 0$  on Hessen matriisi origossa indefiniitti ja kyseessä on tällöin funktion satulapiste.

- Kahdessa muussa pisteessä Hessen matriisin ominaisarvoiksi saadaan

$$\det(\mathbf{H}_f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}) - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 8\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = 4 \pm 2\sqrt{2}.$$

Koska kumpikin ominaisarvoista on positiivinen, on Hessen matriisi kyseisissä pisteissä positiividefiniitti ja tällöin funktiolla on näissä pisteissä lokaali minimi.

• Osoittautuu, ettei gradientilla

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + y - 3, 2y + x - 9)$$

ole reaalisia nollakohtia, mistä päättelemme, ettei funktiolla ole myöskään lokaaleja ääriarvoja reaalitasossa.

• Gradientin

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 + 4y, 4y^3 + 4x - 4y)$$

nollakohdat ovat  $(x, y) \approx (-1.10, 1.35)$ ,  $(x, y) \approx (1.10, -1.35)$  ja  $(x, y) = (0, 0)$ .<sup>1</sup>

Tutkitaan taas Hessen matriisin

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoja kriittisissä pisteissä.

- Kun  $(x, y) = (0, 0)$ , niin

$$\det(\mathbf{H}_f(0, 0) - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + 4\lambda - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -2(1 + \sqrt{5}) < 0 \quad \text{tai} \quad \lambda = 2(\sqrt{5} - 1) > 0,$$

joten kyseessä on funktion satulapiste.

---

<sup>1</sup>Yhtälöparista seuraa kahdeksannen asteen polynomiyhtälö, joten nollakohdat on terveellisintä selvittää laskimella/vapaavalintaisella matematiikkaohjelmistolla.

- Havaitaan, että kahden muun kriittisen pisteen tapauksessa Hessen matriisi on identtinen, joten valinnalla ei ole merkitystä. Saadaan

$$\det(\mathbf{H}_f(-1.10, 1.35) - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda \approx 12 > 0 \text{ tai } \lambda \approx 21 > 0.$$

Siten Hessen matriisi on positiividefiniitti ja funktiolla on näissä pisteissä lokaali minimi.

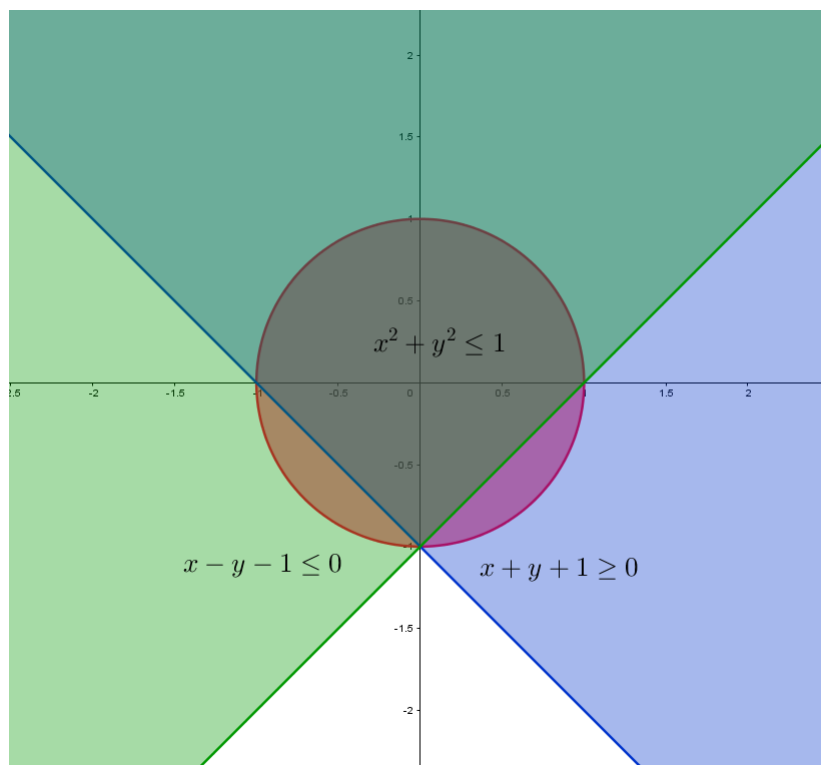
TEHTÄVÄ J2 Etsi seuraavien funktioiden maksimi ja minimi annetussa joukossa:

- a)  $xy + x - y$ ,  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x + y + 1 \geq 0, x - y - 1 \leq 0\}$ ;  
 b)  $x^2 - 2y^2 - xy - x$ ,  $\{(x, y) \mid x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1\}$ ;  
 c)  $3 + x - x^2 - y^2$ ,  $\{(x, y) \mid 2x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

**Ratkaisu:** a)  $1, -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$ ; b)  $\frac{17}{8}, -4$ ; c)  $\frac{13}{4}$ .

RATKAISU

a) Merkitään  $f(x, y) = xy + x - y$ .



Kuva 1:  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x + y + 1 \geq 0, x - y - 1 \leq 0\}$

Funktion  $f$  gradientilla

$$\nabla f(x, y) = (y + 1, x - 1)$$

on nollakohta  $(x, y) = (1, -1)$ , mutta tämä ei kuulu tarkasteltavaan joukkoon, sillä  $1^2 + (-1)^2 = 2 > 1$ .

Tutkitaan sitten funktion arvoja suljetun joukon reunoilla. Täytyy tarkastella kolmea tapausta:

- Suoralla  $x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1$  saadaan

$$\varphi_1(x) = f(x, -x - 1) = x(-x - 1) + x - (-x - 1) = -x^2 + x + 1$$

ja edelleen derivaatalle nollakohta

$$\varphi_1'(x) = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Piste  $(x, y) = (1/2, -3/2)$  ei kuitenkaan kuulu tarkasteltavaan joukkoon, sillä  $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2} > 1$ .

- Vastaavasti suoralla  $x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$  saadaan

$$\varphi_2(x) = f(x, x - 1) = x(x - 1) + x - (x - 1) = x^2 - x + 1$$

ja derivaatalle nollakohta

$$\varphi_2'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Havaitaan, että piste  $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  toteuttaa kaikki tarkasteltavan joukon ehdot.

- Ympyrän kaarella  $x^2 + y^2 = 1$  voidaan käyttää napakoordinaatteja  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , missä  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Tällöin

$$\varphi_3(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta + \cos \theta - \sin \theta.$$

Etsitään derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned}\varphi_3'(\theta) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta - \cos \theta = 0 \\ \Rightarrow x^2 - y^2 - y - x &= 0 \\ \Rightarrow (x + y)(x - y - 1) &= 0 \\ \Rightarrow y = -x \quad \text{tai} \quad y &= x - 1.\end{aligned}$$

Tapauksesta  $y = -x$  seuraa

$$x^2 + y^2 = 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

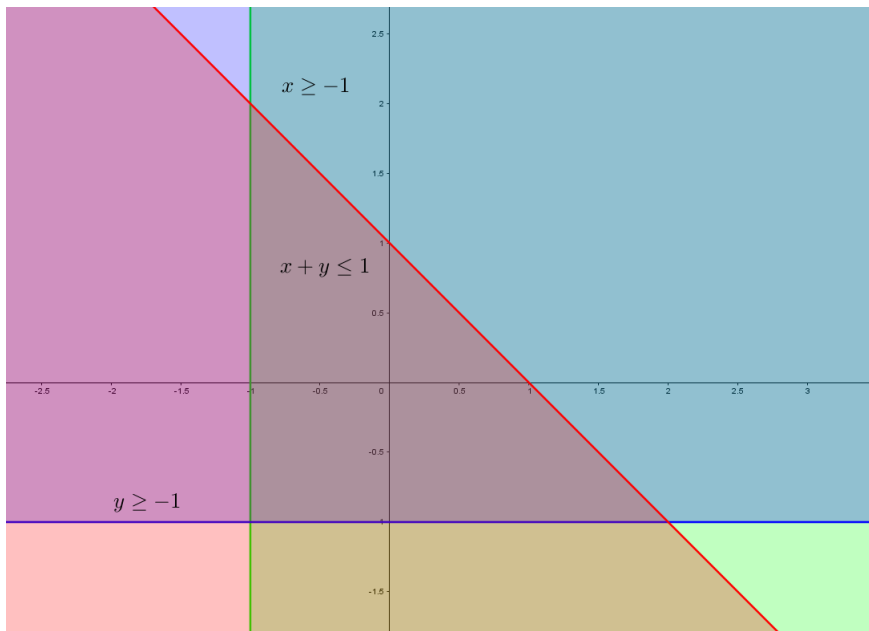
ja jos  $y = x - 1$ , niin

$$x^2 + y^2 = x^2 + (x - 1)^2 = 2x(x - 1) + 1 = 1 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \\ \Rightarrow x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 1,$$

jolloin  $(x, y) = (0, 1)$  tai  $(x, y) = (1, 0)$ . Havaitaan, että näistä neljästä pisteestä  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  on ainoa, joka ei kuulu tarkasteltavaan joukkoon.

Edellä löydettyjen pisteiden  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ,  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(1, 0)$  ja  $(0, 1)$  lisäksi funktion ääriarvot voivat myös sijaita käyrien leikkauspisteissä  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  ja  $(0, -1)$ . Vertailemalla funktion arvoja näissä pisteissä havaitaan, että maksimi annetussa joukossa on  $f(0, -1) = f(1, 0) = 1$  ja minimi  $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$ .

b) Merkitään  $g(x, y) = x^2 - 2y^2 - xy - x$ .



Kuva 2:  $\{(x, y) \mid x \geq -1, y \geq -1, x + y \geq 1\}$

Gradientille

$$\nabla g(x, y) = (2x - y - 1, -4y - x)$$

löydetään nollakohta  $(x, y) = (\frac{4}{9}, -\frac{1}{9})$ , joka täyttää annetun joukon ehdot. Tarkastellaan sitten funktion käyttäytymistä joukon reunoilla:



- Suoralla  $x = -1$  saadaan

$$\varphi_1(y) = g(-1, y) = -2y^2 + y + 2$$

ja derivaatalle nollakohta

$$\varphi_1'(y) = -4y + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4},$$

joten eräs tarkasteltava piste on  $(x, y) = (-1, \frac{1}{4})$ .

- Vastaavasti, kun  $y = -1$ , saadaan

$$\varphi_2(x) = g(x, -1) = x^2 - 2$$

ja tämän derivaatalle nollakohta

$$\varphi_2'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Siten toinen tarkasteltava piste on  $(x, y) = (0, -1)$ , joka myöskin löytyy tarkasteltavasta joukosta.

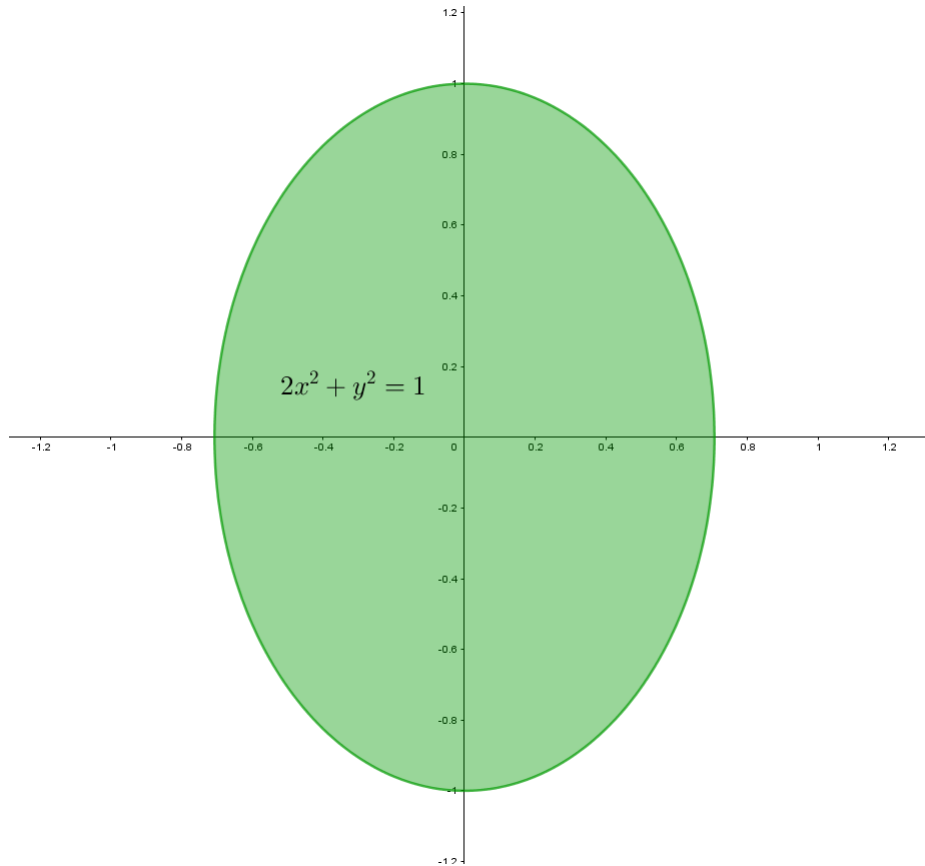
- Viimeisellä suoralla  $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$  havaitaan, että funktion

$$\varphi_3(x) = g(x, 1 - x) = x^2 - 2(1 - x)^2 - x(1 - x) - x = 2(x - 1)$$

derivaatalla  $\varphi_3'(x) = 2$  ei ole tarkasteltavia nollakohtia.

Edellä löydettyjen pisteiden  $(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9})$ ,  $(-1, \frac{1}{4})$  ja  $(0, -1)$  lisäksi funktion ääriarvoja voi taas esiintyä myös käyrien leikkauspisteissä, eli pisteissä  $(-1, -1)$ ,  $(2, -1)$  ja  $(-1, 2)$ . Laskemalla funktion arvot näissä kuudessa pisteessä osoittautuu, että funktion maksimi on  $g(-1, \frac{1}{4}) = \frac{17}{8}$  ja minimi  $g(-1, 2) = -4$ .

c) Merkitään  $h(x, y) = 3 + x - x^2 - y^2$ .



Kuva 3:  $\{(x, y) \mid 2x^2 + y^2 \leq 1\}$

Gradientin

$$\nabla h(x, y) = (1 - 2x, 2y)$$

nollakohta on  $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$ , joka selvästi kuuluu annettuun joukkoon.

Seuraavaksi havaitaan, että joukon reuna  $2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2$  on ellipsi, jolla on parametrusointi  $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \sin \theta)$ , missä  $0 \leq \theta < 2\pi$ .<sup>2</sup> Tällöin käyrällä

$$\varphi(\theta) = h\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \sin \theta\right) = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

<sup>2</sup>Ellipsin  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  parametrusointi on  $(x, y) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$

Etsitään derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - 3 \sin \theta \cos \theta = 0 \\ \Rightarrow -\sin \theta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \right) &= 0 \\ \Rightarrow -y \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x \right) &= 0 \\ \Rightarrow y = 0 \quad \text{tai} \quad x &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Jos  $y = 0$ , niin  $2x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  ja vastaavasti, jos  $x = -\frac{1}{2}$ , niin  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Funktion ääriarvot löytyvät siis pisteiden  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$  ja  $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$  joukosta. Laskemalla funktion arvot jokaisessa viidestä pisteestä voidaan todeta, että funktion maksimi annetussa joukossa on  $h(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{13}{4}$  ja minimi  $h(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = h(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{7}{4}$ .