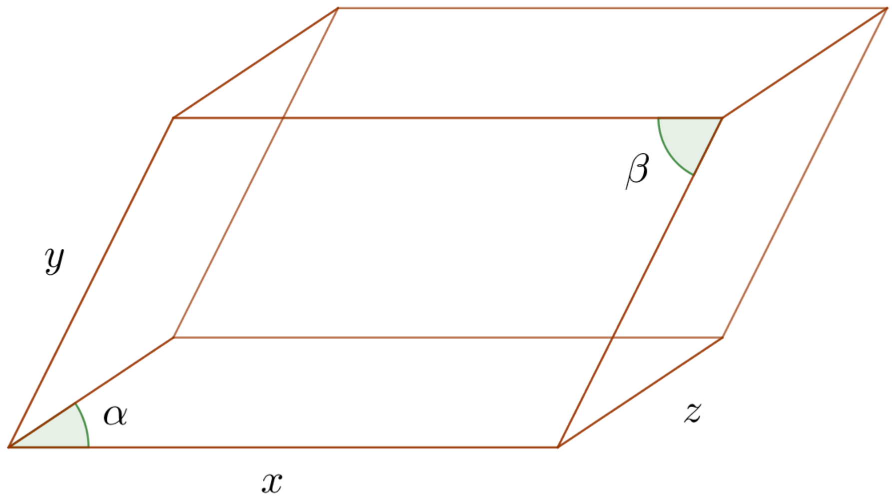
TEHTÄVÄ V1 Suuntaissärmiön särmien pituuksien summa olkoon $12a$. Määritä särmiön suurin mahdollinen tilavuus.
Ratkaisu: a^3.

RATKAISU



Tarkastellaan kuvanmukaista suuntaissärmiötä, jonka särmien pituudet ovat $x > 0, y > 0$ ja $z > 0$. Särmien x ja z välinen terävä (tai suora) kulma $0 < \alpha \leq \pi/2$ ja särmien x ja y välinen terävä (tai suora) kulma $0 < \beta \leq \pi/2$. Tällöin särmistä x ja z muodostuvan tahkon pinta-ala on

$$A = xz \sin \alpha$$

ja tätä tahkoa vastaan särmiön korkeus on puolestaan

$$h = y \sin \beta.$$

Särmiön tilavuus on siis

$$V = Ah = xyz \sin \alpha \sin \beta.$$

Toisaalta rajoite-ehto, joka tässä tapauksessa on $4x + 4y + 4z = 12$, ei riipu kulmista α ja β. Voidaan näin ollen aloittaa maksimomalla tilavuuden lauseke kulmien suhteen kiinnittämällä x, y ja z ja etsimällä gradientin

$$\nabla_{\alpha,\beta} V \Leftrightarrow \begin{cases} xyz \cos \alpha \sin \beta \\ xyz \sin \alpha \cos \beta \end{cases}$$

kriittiset pisteet. Koska $x, y, z > 0$, niin kriittisissä pisteissä

$$\begin{cases} \cos\alpha\sin\beta = 0 \\ \sin\alpha\cos\beta = 0. \end{cases}$$

Näin ollen on oltava

$$\sin\beta = 0 \;\Rightarrow\; \cos\beta \neq 0 \;\Rightarrow\; \sin\alpha = 0,$$

eli $\alpha = \beta = 0$ ($V = 0$, minimi) tai

$$\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \sin\alpha \neq 0 \;\Rightarrow\; \cos\beta = 0,$$

eli $\alpha = \beta = \pi/2$ (maksimi). Toisin sanoen tilavuus on suurin, kun kyseessä on suorakulmainen särmiö!

Edellisen päättelyn nojalla voidaan siis maksimoida funktiota

$$V(x, y, z) = xyz$$

annetulla rajoite-ehdolla, joka voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$g(x, y, z) = 4x + 4y + 4z - 12a = 0.$$

Tällöin Lagrangen funktioksi saadaan

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = xyz + \lambda(4x + 4y + 4z - 12a)$$

ja siten funktion kriittiset pisteet ratkeavat yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} L_x(x, y, z) = yz + 4\lambda & = 0 \\ L_y(x, y, z) = xz + 4\lambda & = 0 \\ L_z(x, y, z) = xy + 4\lambda & = 0 \\ L_\lambda(x, y, z) = 4x + 4y + 4z - 12a & = 0. \end{cases}$$

Yhdistämällä ensimmäiset kolme yhtälöä havaitaan, että

$$yz = xz = xy.$$

Tällöin ainakin kahden muuttujista täytyy olla nollia (esim. $x = 0 \Rightarrow yz = 0$) tai sitten on oltava $x = y = z$. Ensimmäisessä tapauksessa saadaan tietysti minimi $V = 0$, joten jatketaan tarkastelemaan jälkimmäistä tapausta. Sijoittamalla $y = x$ ja $z = x$ viimeiseen yhtälöön saadaan

$$4x + 4y + 4z - 12a = 12x - 12a = 0 \quad\Rightarrow\quad x = a \quad\Rightarrow\quad y = a \text{ ja } z = a.$$

Siten särmiön suurin mahdollinen tilavuus on $V = a^3$.

Huom. Gradientilla ∇g ei ole tässä tapauksessa tarkasteltavia nollakohtia.

TEHTÄVÄ V2 Määritä funktion $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ suurin ja pienin arvo tason $x + y + z = 3$ ja pallon $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ leikkausympyrällä.
Ratkaisu: Maksimi 123, minimi 27.

RATKAISU Tässä saadaan kaksi sidosehtoa

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x + y + z - 3 = 0 \\ h(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 27 = 0 \end{aligned}$$

ja Lagrangen funktio

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda, \mu) &= f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \lambda h(x, y, z) \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + \lambda(x + y + z - 3) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 27). \end{aligned}$$

Ratkaistaan kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} L_x(x, y, z, \lambda, \mu) = 3x^2 + 2\mu x + \lambda & = 0 \\ L_y(x, y, z, \lambda, \mu) = 3y^2 + 2\mu y + \lambda & = 0 \\ L_z(x, y, z, \lambda, \mu) = 3z^2 + 2\mu z + \lambda & = 0 \\ L_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + z - 3 & = 0 \\ L_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - 27 & = 0. \end{cases}$$

Kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä nähdään, että ratkaisujen x, y ja z täytyy toteuttaa tismalleen sama toisen asteen yhtälö. Toisaalta tällaisella yhtälöllä on tunnetusti korkeintaan kaksi reaalista ratkaisua! Näin ollen on joko oltava $x = y = z$ (yksi ratkaisu) tai sitten yhden kolmesta koordinaatista on oltava erisuuri kuin kaksi muuta (kaksi ratkaisua). Tarkastellaan tapauksittain:

(i) Jos $x = y = z$, niin yhtälöryhmän kahdesta alimmasta yhtälöstä seuraa

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3, \end{cases}$$

mikä on ristiriita. Näin ollen koordinaatit eivät voi olla samat.

(ii) Jos taas esimerkiksi $x = y \neq z$, niin

$$x + y + z - 3 = 2x + z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3 - 2x$$

ja sijoittamalla edelleen alimpaan yhtälöön seuraa tällöin

$$x^2 + y^2 + z^2 - 27 = 2x^2 + (3 - 2x)^2 - 27 = 6(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow z = 5 \quad \text{tai} \quad x = 3 \Rightarrow z = -3.$$

Löydettiin siis nollakohdat $(-1, -1, 5)$ ja $(3, 3, -3)$. Toisaalta, jos valitaan $x \neq y = z$ tai $x = z \neq y$, niin vastaavasti saadaan ratkaisut $(5, -1, -1), (-3, 3, 3)$ ja $(-1, 5, -1), (3, -, 3, 3)$.

Osoittautuu, että funktion arvot ovat samat kaikissa pisteistä $(3, 3, -3), (-3, 3, 3)$ ja $(3, -, 3, 3)$, jolloin

$$f(3, 3, -3) = 3^3 + 3^3 + (-3)^3 = 27$$

Samoin käy myös pisteillä $(-1, -1, 5), (5, -1, -1)$ ja $(-1, 5, -1)$. Tällöin

$$f(-1, -1, 5) = (-1)^3 + (-1)^3 + 5^3 = 123.$$

Lisäksi gradientilla ∇g ei ole nollakohtia ja $\nabla h = \mathbf{0}$ ainoastaan origossa, joka ei kuitenkaan täytä vaadittuja sidosehtoja. Siten funktion maksimi annetussa joukossa on 123 ja minimi 27.