

K1 Minimierung:

$$I = \int_0^{\pi} \left( f(x) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right)^2 dx$$

$$0 = \frac{\partial I}{\partial a_0} = - \int_0^{\pi} \left( f(x) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right) dx$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

Indizes  $j = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = - 2 \int_0^{\pi} \left( f(x) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right) \cdot \cos jx dx = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\int_0^{\pi} \cos kx \cos jx dx}_{=0, \text{ wenn } k \neq j} = \int_0^{\pi} f(x) \cos jx dx$$

$$j = k : \int_0^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos jx dx$$

TEHTÄVÄ V2 Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + \sin^2(xy) + \cos^3 y = 0 \\ y + \sin^3(x^2 + y^2) + \cos^5(x + y) = 0 \end{cases}$$

lähinnä origoa oleva ratkaisu kaksiulotteisella Newtonin iteraatiolla. Valitse lähtöarvoiksi  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = -0.5$ . Saatko iteraation suppenemaan jotakin muuta juurta kohti jollain toisella lähtöarvolla?

RATKAISU

**Maple:**

```
with(VectorCalculus):
with(LinearAlgebra):
f := <x + sin(x*y)^2 + cos(y)^3, y + sin(x^2 + y^2)^3 + cos(x + y)^5>:
invJ := MatrixInverse(Jacobian(f, [x, y])):

newtonstep := proc(ix, iy)
<ix, iy> - Multiply(evalf(eval(invJ, [x = ix, y = iy])), evalf(eval(f, [x = ix, y = iy]))):
end proc:
x0 := -1:
y0 := -0.5:
print('i' = 0, 'x' = x0, 'y' = y0):
Digits = 25:

for i to 6 do
  v := newtonstep(x0, y0):
  x0 := v[1]:
  y0 := v[2]:
  print('i' = i, 'x' = x0, 'y' = y0)
end do:
```

Kuudella iteraatiolla saadaan ratkaisulle approksimaatio

$$x = -0.812366032250553, y = -0.538090858562097.$$

Lisäksi tarkastelemalla yhtälöryhmän tasa-arvokäyriä voidaan havaita, ettei muita ratkaisuja ole.

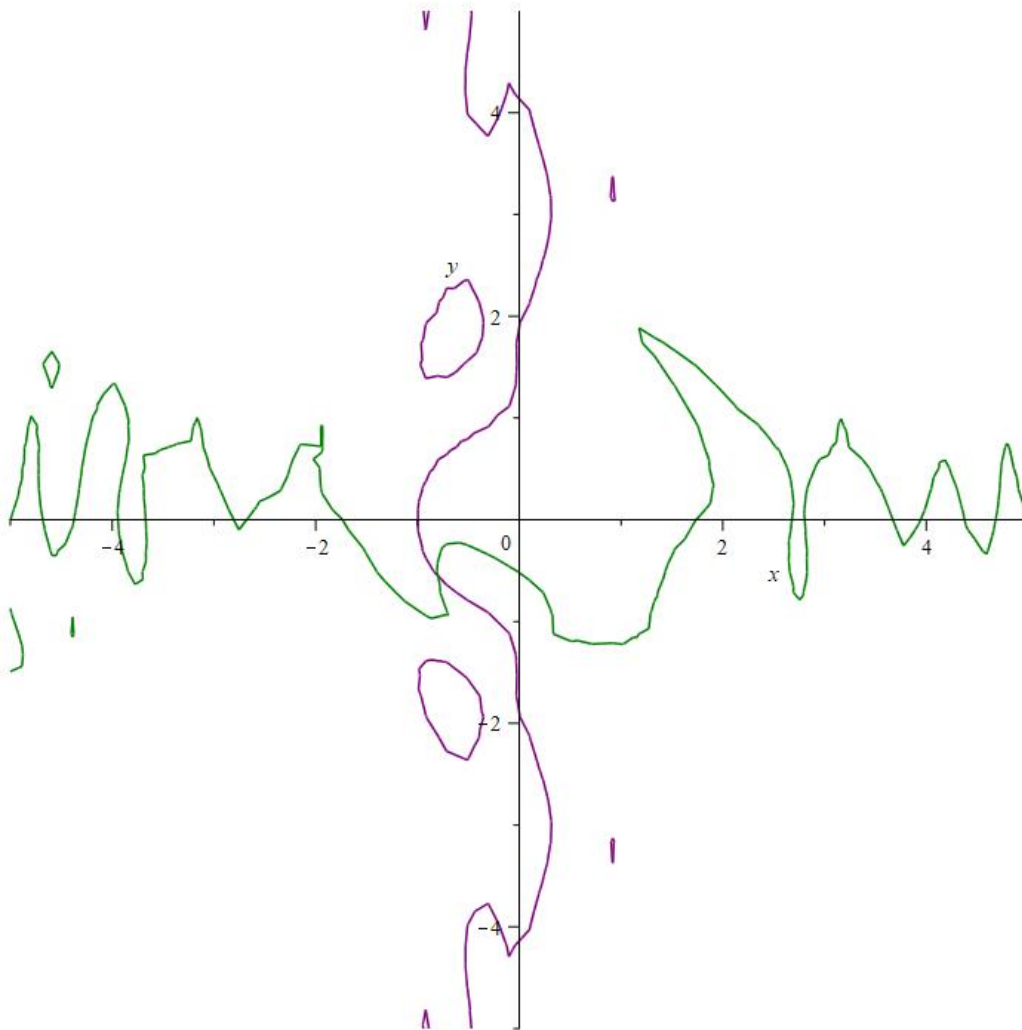
## Maple:

with(plots):

```
p1 := contourplot(f[1], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, contours = [0], color = "Purple");
```

```
p2 := contourplot(f[2], x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, contours = [0], color = "Green");
```

```
plots:-display({p1, p2}, size = [700, 700])
```



Kuva 1: Yhtälöryhmän tasa-arvokäyrät