TEHTÄVÄ V1 Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat xy-tason yläpuolella pinnat

$$z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$$

Ratkaisu: $\frac{1}{2}$.

RATKAISU Kappaletta rajaa siis yläpuolelta hyperbolinen paraboloidi $z = x^2 - y^2$ ja alapuolelta xy-taso $z = 0$. Lisäksi se on rajattu lieriön $x^2 + y^2 = 1$ sisäpuolelle. Nämä ehdot toteuttava joukko on

$$A = \{(x, y, z) \mid 0 \le z \le x^2 - y^2, 0 \le x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Vaihdetaan taas sylinterikoordinaatteihin

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \text{ ja } z = z.$$

Tällöin paraboloidi määrää muuttujan z integroimisrajoiksi

$$0 \le z \le x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(1 - 2\sin^2\varphi),$$

mutta toisaalta tästä myös havaitaan, että

$$0 \le z \le x^2 - y^2 \ \Rightarrow\ x^2 - y^2 \ge 0 \ \Rightarrow\ |x| \ge |y|$$

$$\Rightarrow\ |\cos\varphi| \ge |\sin\varphi| \ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \text{ tai } \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}.$$

Lisäksi sylinteripinta antaa rajat radiaaliselle komponentille:

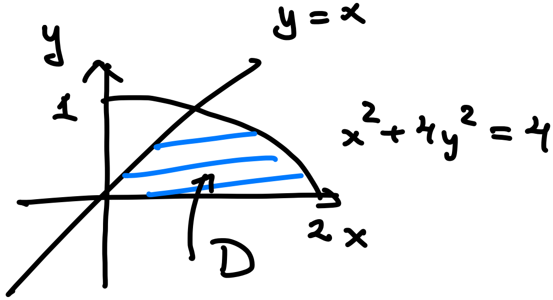
$$0 \le x^2 + y^2 \le 1 \ \Rightarrow\ 0 \le r^2 \le 1.$$

Symmetrian nojalla riittää laskea tilavuus, kun kiertokulma $0 \le \varphi \le \pi/4$. Tällöin tulos on neljäsosa koko kappaleen tilavuudesta. Saadaan siten

$$\begin{aligned}
\int_A 1\,dV &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^1\int_0^{r^2(1-2\sin^2\varphi)} r\,dzdrd\varphi \\
&= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^3(1 - 2\sin^2\varphi)\,drd\varphi \\
&= 4\int_0^{\pi/4} \frac{1}{4}(1 - 2\sin^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \big(1 - 2\sin^2\varphi\big)\,d\varphi = \int_0^{\pi/4} \big(1 - (1 - \cos 2\varphi)\big)\,d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi\,d\varphi = \Big/_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

K2

$$I = \iint_D y/x \, dx\,dy$$



Mille muuttujenvaihdolle saadaan suorakulmainen (so. tulomuotoinen) alue?

Tehtävä on siis käänteinen (kurssimateriaalissa on esimerkki).

$$\begin{cases} u(x,y) = \ldots \\ v(x,y) = \ldots \end{cases} \quad \text{s.e. } (u,v) \in [a,b]\times[c,d]$$

Miten ihmeessä oikean valinnan voi tehdä?
Muuttuvia suureita ei ole kuin

(i) x^2+4y^2, joka saa arvoja välillä $[0,4]$

(ii) $y = x$, välillä $[0,1] \ni x$ eli myös suhde y/x saa arvoja ko. välillä (ajatellaan, että $y=0$ ennen kuin $x=0$, jolloin ristiriitaa ei synny)

Onkin siis luonnollista valita

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 + 4y^2 & \in [0,4] \\ v(x,y) = y/x & \in [0,1] \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 8y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 8\frac{y^2}{x^2} = 2 + 8v^2$$

Koska haluamme käänteiskuvauksen Jacobiaanin, niin

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2+8v^2}$$

y/x

$$I = \int_0^4 \int_0^1 \frac{v}{2+8v^2}\,du\,dv \quad ; \text{ sij. } w = 2+8v^2$$

$$dw = 16v\,dv$$

$$= \frac{4}{16}\int_2^{10} \frac{dw}{w} = \frac{1}{4}(\ln 10 - \ln 2)$$

$$= \frac{1}{4}\ln 5$$