Viikko 7 AV

M1 Alue A on puoliympyrä : $y = \sqrt{4 - x^2}$

$$\iint_A (x+3)\,dA = \underbrace{\iint_A x\,dA}_{=0} + \iint_A 3\,dA$$

(x pariton, A symmetrinen)

$$= 3 \cdot \frac{\pi 2^2}{2} = 6\pi \quad (\text{ympyrän säde} = 2)$$

M2 Pascalin simpukka : $r = 2 + \cos\theta$

Ympyrä : $r = 1$

Integroimisrajat : $1 \le r \le 2 + \cos\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$2 + \cos\theta \ge 2 - 1 = 1$ kaikilla θ

Napakoordinaatit : Jacobiaani r

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{2+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \Big/_1^{2+\cos\theta} \frac{r^2}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left((2+\cos^2\theta)^2 - 1 \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(3 + 4\cos\theta + \cos^2\theta \right) d\theta$$

integrali $= 0$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$= 3\pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta$$

integrali $= 0$

$$= 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

J1

Tehtävä ~~V1~~ Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat xy-tason yläpuolella pinnat

$$z = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$$

Ratkaisu: $\frac{1}{2}$.

Ratkaisu Kappaletta rajaa siis yläpuolelta hyperbolinen paraboloidi $z = x^2 - y^2$ ja alapuolelta xy-taso $z = 0$. Lisäksi se on rajattu lieriön $x^2 + y^2 = 1$ sisäpuolelle. Nämä ehdot toteuttava joukko on

$$A = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x^2 - y^2, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Vaihdetaan taas sylinterikoordinaatteihin

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \text{ ja } z = z.$$

Tällöin paraboloidi määrää muuttujan z integroimisrajoiksi

$$0 \leq z \leq x^2 - y^2 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(1 - 2\sin^2\varphi),$$

mutta toisaalta tästä myös havaitaan, että

$$0 \leq z \leq x^2 - y^2 \ \Rightarrow\ x^2 - y^2 \geq 0 \ \Rightarrow\ |x| \geq |y|$$

$$\Rightarrow\ |\cos\varphi| \geq |\sin\varphi| \ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \text{ tai } \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Lisäksi sylinteripinta antaa rajat radiaaliselle komponentille:

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \ \Rightarrow\ 0 \leq r^2 \leq 1.$$

Symmetrian nojalla riittää laskea tilavuus, kun kiertokulma $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Tällöin tulos on neljäsosa koko kappaleen tilavuudesta. Saadaan siten

$$\begin{aligned}
\int_A 1\,dV &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^1\int_0^{r^2(1-2\sin^2\varphi)} r\,dzdrd\varphi \\
&= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^3(1 - 2\sin^2\varphi)\,drd\varphi \\
&= 4\int_0^{\pi/4}\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4}\left(1 - 2\sin^2\varphi\right)d\varphi = \int_0^{\pi/4}\left(1 - (1 - \cos 2\varphi)\right)d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = \Big/_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

TEHTÄVÄ J2 Laske muotoa $x = as\cos t$, $y = bs\sin t$ (a ja b vakioita) olevaa muunnosta käyttäen tasointegraali

$$\int_A \ln\left(1+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\,da, \quad A = \{\,(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ 9x^2+4y^2\leq 36\,\}.$$

Ratkaisu: $3\pi(\ln 2 - \frac{1}{2})$.

TEHTÄVÄ J2 Valitsemalla muunnoksessa $a = 2$ ja $b = 3$ saadaan

$$x = 2s\cos t \ \text{ ja } y = 3s\sin t.$$

Tutkitaan sitten kuinka integroimisrajat täytyy nyt valita. Tason ensimmäisessä neljänneksessä $x \geq 0, y \geq 0$ tulee kiertokulma rajoittaa välille $0 \leq \pi \leq \pi/2$. Lisäksi

$$9x^2 + 4y^2 = 9\cdot 4s^2\cos^2 t + 4\cdot 9s^2\sin^2 t = 36s^2 \leq 36 \ \Rightarrow\ s \leq 1.$$

Lisäksi jacobiaaniksi saadaan

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos t & -2s\sin t \\ 3\sin t & 3s\cos t \end{vmatrix}$$

$$= 6s\cos^2 t - (-6s\sin^2 t) = 6s(\cos^2 t + \sin^2 t) = 6s.$$

Voidaan nyt laskea integraali:

$$\begin{aligned}
\int_A \ln\left(1+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)da &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \ln\bigl(1+s^2\cos^2 t + s^2\sin^2 t\bigr)(6s)\,dsdt \\
&= 3\pi\int_0^1 \ln(1+s^2)s\,ds \qquad \|\ \textbf{sij. } u = 1+s^2 \\
&= 3\pi\int_1^2 \ln u\frac{du}{2} \\
&= \frac{3\pi}{2}\Big/_1^2 u(\ln u - 1) \\
&= \frac{3\pi}{2}\bigl(2\ln 2 - 1 - (\ln 1 - 1)\bigr) \\
&= 3\pi\ln 2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$