Demouppgifter 4

① Hitta och klassificera samtliga kritiska punkter till $f(x,y) = x\sin y$

<u>Lösning</u>: Kritiska punkter ?

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\sin y, x\cos y)$$

När är $\nabla f = (0,0)$?

När $\sin y = 0$ och $x\cos y = 0$

Om $\sin y = 0$ så är $\cos y \neq 0$

Alltså är $\nabla f(x,y) = (0,0)$ då $x = 0$ och $\sin y = 0$ (eller $y = n\pi$ då $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

Kritiska punkter $(x,y) = (0, n\pi)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Klassificera genom att studera $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ i dessa punkter.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{pmatrix}$$

Notera att då $y = n\pi$ så är $\cos y = (-1)^n$

Alltså $H_f(0, n\pi) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n \\ (-1)^n & 0 \end{pmatrix}$

Egenvärden? $\begin{vmatrix} -\lambda & (-1)^n \\ (-1)^n & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (-1)^{2n} = \lambda^2 - 1 = 0$

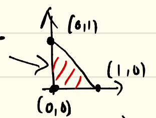
$\Longrightarrow \lambda = \pm 1$

Egenvärdena har olika tecken

$\Longrightarrow$ Samtliga kritiska punkter är sadelpunkter.

(2) Låt $f(x,y) = xy(1+x-y)$ och T vara triangeln i planet med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, och $(0,1)$.

Maximera $f(x,y)$ då $(x,y) \in T$.



Lösning: Först kritiska punkter i T

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(y + 2xy - y^2,\ x + x^2 - 2xy\right)$$

$\nabla f = (0,0) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y(1+2x-y) = 0 \\ x(1+x-2y) = 0 \end{cases}$$

Först antag att $y = 0$

Då är antingen $x = 0$ eller $1 + x = 0$

$x = -1$

Kandidat 1 $(x,y) = (0,0) \in T$

(men $(-1,0) \notin T$)

Nu antag att $y \neq 0$. Då måste $1+2x-y=0$ och $x=0$ eller $1+x-2y=0$

Om $x=0$ så blir $1-y=0 \Rightarrow y=1$

Kandidat 2: $(x,y)=(0,1) \in T$

Nu antag att $x \neq 0$ också. Då gäller

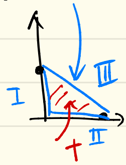
$$\begin{cases} 1+2x-y=0 \\ 1+x-2y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-y=-1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1/3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$(x,y) = (-1/3, 1/3) \notin T$$

De kandidater vi hittat ligger på ∂T (randen till T)



Vi undersöker nu f på ∂T

På I är $x=0$ och $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow f(x,y)=0$

På II är $y=0$ och $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x,y)=0$

På III gäller $y = 1 - x$ och $0 \le x \le 1$

Bilda $g(x) = f(x, 1-x) = x(1-x)(1+x-(1-x)) =$

$= x(1-x)2x = 2x^2 - 2x^3$

$g'(x) = 4x - 6x^2 = 2x(2-3x)$

$g'(x) = 0$ då $x = 0$ eller $x = 2/3$

$g(0) = g(1) = 0$ $\quad g(1/2) = f(2/3, 1/3) = 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$

$= \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{27}$

Maximum är därför $\frac{8}{27}$ och antas då $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3 Maximera $\sum_{i=1}^{n} x_i$ då $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

Lösning: Låt $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

och $g(x_1, \dots, x_n) = -1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Bilda Lagrangefunktionen

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$$

$$\nabla L = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}, g(x_1, \dots, x_n)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{x_i} = 1 + 2\lambda x_i$$

$\Rightarrow$ Vid kritisk punkt gäller $1 + 2\lambda x_i = 0$ för $i = 1, 2, \ldots, n$.

Alltså $x_i = -\frac{1}{2\lambda}$ för $i = 1, \ldots, n$

Vid kritisk punkt gäller också $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$

Alltså $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \ldots + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow n \cdot \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{n}{4} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Alltså ger $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = -\frac{1}{2\left(\pm\frac{\sqrt{n}}{2}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ extremvärden för $\sum_{i=1}^{n} x_i$

Maximum får vi då $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (och minimum då $x_1 = \ldots = x_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}$)

Maximum är $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

(Notera också att $\nabla g = 2(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ då $\sum x_i^2 = 1$.)

Hemtal 4

① Verifiera att $(2,1)$ är en kritisk punkt för $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Undersök om $(2,1)$ är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt.

Lösning: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2 + 3y^2 - 15, 6xy - 12)$.

$$\nabla f(2,1) = (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 - 15, 6 \cdot 2 \cdot 1 - 12) = (0,0)$$

$(2,1)$ är en kritisk punkt

Vi studera $H_f(2,1)$ för att bestämma vilken typ av kritisk punkt $(2,1)$ är.

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

Egenvärden till $H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & 6 \\ 6 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)^2 - 36 = 0$$

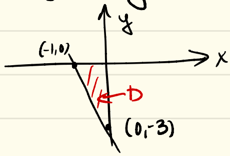
$$(12-\lambda)^2 = 36 \iff 12-\lambda = \pm 6$$

$$\lambda = 12 \pm 6$$

Båda egenvärdena är positiva och därför är

$(2,1)$ ett lokalt minimum.

(2) Låt D vara triangeln i planet som ges av olikheterna $x \leq 0$, $y \leq 0$ och $3x + y \geq -3$. Maximera funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ på triangeln D.



Lösning:

Kritiska punkter i D.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x - y + 1,\ 2y - x + 1)$$

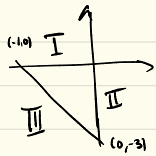
$$\nabla f = (0,0) \iff \begin{cases} 2x - y = -1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) (1/3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) (+2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$(-1,-1) \notin D$ eftersom $3(-1) + (-1) = -4 < -3$

Nu undersöker vi randen ∂D



På I är $y = 0$ och $-1 \leq x \leq 0$

$$g(x) = f(x,0) = x^2 + x$$

$$g'(x) = 2x + 1 = 0 \implies x = -1/2$$

$$g(-1) = f(-1,0) = 1 - 1 = 0 \quad ; \quad g(0) = f(0,0) = 0$$

$$g(-1/2) = f(-1/2, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

På II gäller $x=0$ och $-3 \leq y \leq 0$.

$h(y) = f(0,y) = y^2 + y$. På samma sätt som på I för vi $f(0,-3) = 6$, $f(0,0)=0$, $f(0,-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

På III gäller $y = -3-3x$ och $-1 \leq x \leq 0$

$$j(x) = f(x,-3-3x) = x^2 + (-3-3x)^2 - x(-3-3x) + x + (-3-3x)$$
$$= x^2 + 9 + 18x + 9x^2 + 3x + 3x^2 - 3 - 2x =$$
$$= 13x^2 + 19x + 6$$

$j'(x) = 26x + 19 \Rightarrow j'(x) = 0$ då $x = -\frac{19}{26}$

$j(-1) = f(-1,0) = 19-19=0$

$j(0) = f(0,-3) = 6$

$$j(-\tfrac{19}{26}) = \frac{13 \cdot 19^2}{26^2} - \frac{19^2}{26} + 6$$
$$= \frac{19^2}{26}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 6 = \frac{52 \cdot 6 - 19^2}{52} < 0$$

Vi jämför värden och ser att maximum antas då $(x,y) = (0,-3)$. Maximum är 6.

(3) Maximera funktionen $f(x,y) = 4 + x + y$ då x och y uppfyller bivillkoret
$$x^2 + 4y^2 = 1$$

Lösning: Maximera $f(x,y) = 4 + x + y$ då
$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0.$$

Bilda $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ och sök kritiska punkter till L.

$$\nabla L = (1 + 2x\lambda,\ 1 + 8y\lambda,\ x^2 + 4y^2 - 1)$$

$\nabla L = \vec{0}$ om $\quad x = -\frac{1}{2\lambda},\ y = -\frac{1}{8\lambda}$

och $x^2 + 4y^2 = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{4}{8^2\lambda^2} = 1.$

$$1 = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{4}{8^2\lambda^2} = \frac{16+4}{64\lambda^2} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{20}{64}$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{20}}{8}$$

Vi får två kandidater
$$(x,y) = \left(-\frac{1}{2\lambda}, -\frac{1}{8\lambda}\right) = \left(\pm\frac{4}{\sqrt{20}}, \pm\frac{1}{\sqrt{20}}\right)$$

Vi beräknar $f\left(\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 4 + \frac{4}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{20}} = 4 + \frac{5}{\sqrt{20}}$

$$f\left(-\frac{4}{\sqrt{20}}, -\frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 4 - \frac{4}{\sqrt{20}} - \frac{1}{\sqrt{20}} = 4 - \frac{5}{\sqrt{20}}$$

$\Rightarrow$ Maximum är $4 + \frac{5}{\sqrt{20}}$

(Notera också att $\nabla g = (2x, 8y) \neq (0,0)$

då $x^2 + 4y^2 = 1.$)

Inlämningsuppgift 4

① Hitta alla kritiska punkter för

$$f(x,y) = 2x^2+y^2+2xy-2x-2y+1$$

och klassificera dem.

Lösning: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (4x+2y-2,\ 2x+2y-2)$

$\nabla f = (0,0)$ om $\begin{cases} 4x+2y=2 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$

Vi ser $2x=0$ och därför $2y=2$

$\Longrightarrow$ $(x,y)=(0,1)$

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Egenvärden?

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda)-4 = \lambda^2-6\lambda+4=0$$

$\lambda = 3 \pm \sqrt{9-4} = 3 \pm \sqrt{5}$

$\lambda_1 = 3-\sqrt{5} > 0$ & $\lambda_2 = 3+\sqrt{5} > 0$

Båda egenvärdena positiva $\Longrightarrow$

$(0,1)$ är ett lokalt minimum

(2) Bestäm det största och minsta värdet för $f(x,y)=x^2y$ i området som ges av $x^2+y^2 \leq 4$.

Lösning: Kritiska punkter då $x^2+y^2<4$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xy, x^2)$$

$$\nabla f = (0,0) \quad \text{då} \quad \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Kritiska punkter då $(x,y)=(0,y)$ och $x^2+y^2<1$.

Kandidatpunkterna har funktionsvärde
$$f(0,y) = 0^2y = 0$$

Undersök randen (där $x^2+y^2=4$)

Bilda $L(x,y,\lambda) = x^2y + \lambda(x^2+y^2-4)$

$$\nabla L = (2xy + 2x\lambda,\ x^2 + 2y\lambda,\ x^2+y^2-4)$$

Kritiska punkter för L.

$$\begin{cases} 2x(y+\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y\lambda = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

$2x = 0$ eller $y + \lambda = 0$

(Notera att $\nabla g = (2x, 2y) \neq (0,0)$ då $x^2+y^2=4$)

Om $x=0$ då $\begin{cases} 2y\lambda = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

(redan studerad)

Alltså $y = -\lambda$ ger $\begin{cases} x^2 + 2(-\lambda)\lambda = 0 \\ x^2 + \lambda^2 = 4 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 2\lambda^2 \\ 4 = x^2+\lambda^2 = 3\lambda^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \lambda^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\Longrightarrow \quad x^2 = \frac{8}{3}$ och $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ger max och min

$$f(x,y) = \frac{8}{3}\cdot\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \pm\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

Maximum är $\frac{16\sqrt{3}}{9}$ och minimum $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$

(3) Låt $f(x,y) = x^2+3y^2$. Beteckna f:s minimivärde på $x+y=c$ med $m(c)$. Hitta en sluten formel för $m(c)$.

Lösning: Vi minimerar $f(x,y)$ då $x+y=c$
(Problemet har en lösning för varje c.)

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + 3y^2 + \lambda(x+y-c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x+\lambda \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 6y+\lambda \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x+y-c$$

$$\left[\, g(x,y) = x+y-c \Rightarrow \nabla g = (1,1) \neq (0,0) \,\right]$$

Vi får $\begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 6y+\lambda=0 \\ x+y=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{\lambda}{2} & (i) \\ y=-\frac{\lambda}{6} & (ii) \\ -\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda}{6}=c & (iii) \end{cases}$

$\Rightarrow$ (iii) ger $\lambda=-\frac{6}{4}c=-\frac{3}{2}c$ och

(i) ger $x=\frac{3c}{4}$ samt (ii) ger $y=\frac{c}{4}$

Minimum på $x+y=c$ blir därför

$$f\left(\frac{3c}{4},\frac{c}{4}\right)=\left(\frac{3c}{4}\right)^2+3\left(\frac{c}{4}\right)^2=\frac{9}{16}c^2+\frac{3}{16}c^2=$$

$$=\frac{12}{16}c^2=\frac{3}{4}c^2$$

Alltså $m(c)=\frac{3}{4}c^2$.