ELEC-C1230 Säätötekniikka

Luku 6: Tilasäätö, tilaestimointi, saavutettavuus ja tarkkailtavuus

Aalto-yliopisto

Lukuohje

- Kertaa tilaesitys
- Oleellista: Tilatakaisinkytketty säätö ja tilatarkkailija
- Saavutettavauus ja tarkkailtavuus käsitteinä. Mitä niillä on tekemistä tilatakaisinkytkennän ja tilatarkkailijan kanssa?
- Toteutus Matlabilla
- Integraattorin lisääminen tilasäätimeen on hyödyllinen työkalu, mutta hieman hankala. Ylikurssia.

Aalto-yliopisto

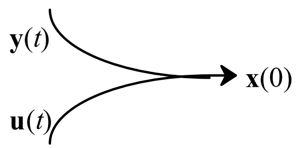
Tilaesityksen hallinta ja tilasäätö

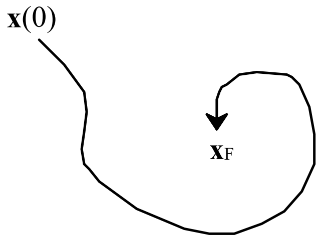
- Edellisessä luvussa tarkasteltiin napoja ja nollia sekä niiden vaikutuksia systeemin käyttäytymiseen aikatasossa
- Luvussa 4 esiteltiin PID-säädin, joka on kaikkein yleisin I/O-säädin (input/output-säädin eli säädin joka tarkastelee ainoastaan systeemin tuloa ja lähtöä eikä sisäisiä riippuvuuksia)
- Tässä luvussa tarkastellaan mallipohjaista napojenasettelua säätimen suunnittelukriteerinä ja esitellään tilasäädin, jossa ohjataan systeemin sisäisiä riippuvuuksia eli tilasuuretta sekä tilaestimaattori, jonka avulla voidaan estimoida ei-mitattavaa tilasuuretta.
- Systeemin ominaisuuksista tarkastellaan **saavutettavuutta** ja **tarkkailtavuutta**. Kolmikkoa (asymptoottinen) stabiilisuus, saavutettavuus ja tarkkailtavuus kutsutaan systeemin strukturaalisiksi ominaisuuksiksi.
- Termeissä esiintyy kirjallisuudessa vaihtelua.

Aalto-yliopisto

Ohjattavuus, **saavutettavuus**, havaittavuus ja **tarkkailtavuus**

- Periaatteelliset kysymykset:
  - Kuinka alkutila $x(0)$ voidaan määrittää havainnoista $\mathbf{u}(t)$ ja $\mathbf{y}(t)$?
  - Kuinka tila viedään annetusta alkutilasta $\mathbf{x}(0)$ toiseen tilaan $\mathbf{x}_f$?





Aalto-yliopisto

Ohjattavuus, saavutettavuus, havaittavuus ja tarkkailtavuus

- Määritelmät
  - Systeemi on **saavutettava** (reachable), jos on mahdollista löytää ohjaussekvenssi, jolla saavutetaan mielivaltainen tila $\mathbf{x}(t)$ mielivaltaisesta alkutilasta $\mathbf{x}(t_0)$ äärellisessä ajassa.
  - Systeemi on **ohjattava** (controllable), jos on mahdollista löytää ohjaussekvenssi, jolla saavutetaan origo (tasapainotila) mielivaltaisesta alkutilasta äärellisessä ajassa. Lineaarisella aikajatkuvalla järjestelmällä saavutettavuus on ekvivalentti ohjattavuuden kanssa. (Mutta ei enää diskreeteillä järjestelmillä!)
  - Systeemi on **tarkkailtava** (observable) jos on mahdollista määrittää alkutila $\mathbf{x}(t_0)$, havaintojen $(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),\ t\in[t_0,t_1])$ perusteella.

  Termiä **havaittavuus** käytetään yleisesti **tarkkailtavuuden** synonyyminä.
- Jos systeemi on saavutettava, niin sille voidaan muodostaa tilasäädin, jolla säädetyn järjestelmän navat voidaan asetella mielivaltaisesti. Jos systeemi on tarkkailtava, niin sille voidaan muodostaa tilaestimaattori, jonka estimointivirheen pienenemistä kuvaavat navat voidaan asetella mielivaltaisesti.

Saavutettavuus ja tarkkailtavuus

- Tuloksia (ei todisteta, todistukset hankalia):
- Systeemi on saavutettava, jos ja vain jos sen ohjattavuusmatriisin *Mc* rangi on täysi (n on systeemin dimensio).
- Systeemi on tarkkailtava, jos ja vain jos sen havaittavuusmatriisin *Mo* rangi on täysi (n on systeemin dimensio).
- Rangi tarkoittaa kuva-avaruuden dimensiota. Lineaarialgebraa (ei käsitellä sen teoriaa tässä tarkemmin)

$$\operatorname{rank}\{\mathbf{M}_c\}=n \qquad \mathbf{M}_c=\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$$

$$\operatorname{rank}\{\mathbf{M}_o\}=n \qquad \mathbf{M}_o=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \hline \mathbf{CA}\\ \hline \mathbf{CA}^2\\ \hline \vdots\\ \hline \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix}$$

Rangin tutkiminen

- Neliömatriisista rangin täyteys voidaan tutkia determinantin avulla:
  - Neliömatriisille $\mathbf{M}$ (k×k)

$$\operatorname{rank}\{\mathbf{M}\}=k, \qquad \text{jos} \quad \det\{\mathbf{M}\}\neq 0$$

- Jos $\mathbf{M}$ (k×p) ei ole neliöllinen ($k\neq p$), niin voidaan tutkia matriisien $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ (p×p) ja $\mathbf{MM}^T$ (k×k) rangeja (kun matriisi kerrotaan transpoosillaan, sen rangi ei muutu).

$$\operatorname{rank}\{\mathbf{M}\}=\operatorname{rank}\{\mathbf{M}^T\mathbf{M}\}=\operatorname{rank}\{\mathbf{MM}^T\}$$

- Näistä neliöllisistä matriiseista valitaan pienempidimensioinen, jonka determinantin on oltava nollasta poikkeava.
- Matlabin komento *rank* antaa rangin.

Esimerkki 2. Mekaaninen systeemi

- Tutkitaan mekaanisen systeemin saavutettavuus ja tarkkailtavuus.

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)=\mathbf{Ax}(t)+\mathbf{B}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)=\mathbf{Cx}(t)\end{cases}$$

- Jos systeemi on saavutettava, niin säädetylle systeemille voidaan aikaansaada mielivaltainen paikka ja nopeus.
- Jos systeemi on tarkkailtava, niin paikan (y) ja voiman (u) avulla voidaan määrittää paikka ja nopeus ($\mathbf{x}$).

Esimerkki 2. Mekaaninen systeemi

- Ohjattavuus- ja havaittavuusmatriisit ovat

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB}] = \left[\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \,\vdots\, \begin{bmatrix}0 & 1\\-5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \hdashline \mathbf{CA}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[1 \;\; 0]\\ \hdashline [1 \;\; 0]\begin{bmatrix}0 & 1\\-5 & -2\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

- Tutkitaan rangin täyteydet

$$\det \mathbf{M}_c = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} \mathbf{M}_c = 2$$
$$\det \mathbf{M}_o = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rank} \mathbf{M}_o = 2$$

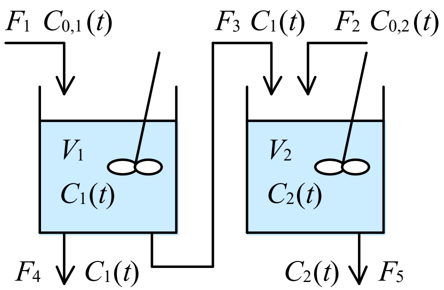
- Mekaaninen järjestelmä on sekä saavutettava että tarkkailtava.

Saavutettavuus

- Jos systeemi on saavutettava, niin tiedetään että sopivalla ohjauksella voidaan saavuttaa mielivaltainen lopputila.
- Se ei kuitenkaan tarkoita sitä, että systeemi saadaan pysymään lopputilassa – systeemi saadaan pysymään ainoastaan tasapainotiloissa eli tiloissa, joissa kaikki tilasuureiden derivaatat saavat arvon 0.
- Esimerkiksi mekaanisessa järjestelmässä ensimmäinen tila on paikka ja toinen nopeus. On mahdotonta saada pidettyä tila, jossa kumpikin tilasuure on nollasta poikkeava vakioarvo.
  - Jos toisella tilalla (nopeudella) on nollasta poikkeava vakioarvo, niin ensimmäinen tila (paikka) on aina jatkuvassa muutostilassa
  - Jos ensimmäisellä tilalla on vakioarvo, niin toinen tila saa arvon 0.
  - On kuitenkin mahdollista saada systeemi käymään hetkellisesti mielivaltaisessa tilassa.

Esimerkki. Virtausjärjestelmä

- Tutkitaan kuvan virtausjärjestelmän saavutettavuus ja tarkkailtavuus eri tilanteissa (virtaukset ja tilavuudet ovat vakioita, pitoisuudet C_1 ja C_2 ovat tilasuureita)



a. $C_{0,1}$ on ohjaus, $C_{0,2}$ on häiriö, C_2 on lähtösuure
b. $C_{0,1}$ on häiriö, $C_{0,2}$ on ohjaus, C_2 on lähtösuure
c. $C_{0,1}$ on ohjaus, $C_{0,2}$ on häiriö, C_1 on lähtösuure
d. $C_{0,1}$ on häiriö, $C_{0,2}$ on ohjaus, C_1 on lähtösuure

$$F_1 = F_5 = 2$$
$$F_2 = F_3 = F_4 = 1$$
$$V_1 = V_2 = 1$$

Esimerkki. Virtausjärjestelmä

- Systeemiä kuvaa malli

$$\begin{cases}\dot{C}_1(t) = -2C_1(t) + 2C_{0,1}(t)\\ \dot{C}_2(t) = C_1(t) - 2C_2(t) + C_{0,2}(t)\end{cases}$$

- Tästä saadaan tilaesitykset:

$$a.\ \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}-2 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases} \qquad b.\ \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}-2 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}v(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$c.\ \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}-2 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases} \qquad d.\ \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}-2 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}v(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$a.\text{ ja } c.\quad \det \mathbf{M}_c = \det\begin{bmatrix}2 & -4\\0 & 2\end{bmatrix} = 4 \neq 0 \qquad a.\text{ ja } b.\quad \det \mathbf{M}_o = \det\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

$$b.\text{ ja } d.\quad \det \mathbf{M}_c = \det\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -2\end{bmatrix} = 0 \qquad c.\text{ ja } d.\quad \det \mathbf{M}_o = \det\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix} = 0$$

Esimerkki. Virtausjärjestelmä

- Tuloksista nähdään, että jos käytetään $C_{0,1}$:stä ohjauksena, niin systeemi on saavutettava ja jos käytetään $C_{0,2}$:sta ohjauksena, niin systeemi ei ole saavutettava (ensimmäinen tila eli ensimmäisen säiliön pitoisuus ei ole saavutettava).
- Vastaavasti, jos lähtösuure on C_1, niin systeemi on ei ole tarkkailtava (toinen tila eli toisen säiliön pitoisuus ei ole tarkkailtava) ja jos lähtösuure on C_2, niin systeemi on tarkkailtava.
- Oleellista on tietää, että jos systeemissä on ei-ohjattavia tai ei-tarkkailtavia tiloja, niin mielivaltaista napojen asettelua ei voida tehdä. Mutta jos nämä tilat ovat kuitenkin asymptoottisesti stabiileja, ei välitetä niistä ja tehdään sellainen tilaohjaus / tarkkailija mikä pystytään. Ei ohjattavat ja ei-tarkkailtavat moodit kuolevat pois, ei välitetä niistä.

Esimerkki

- Otetaan toinen esimerkki. Analysoidaan systeemi, jota kuvaa tilaesitys

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Ohjattavuus- ja tarkkailtavuusmatriiseille saadaan:

$$\mathbf{M}_c = \left[\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB} \;\vdots\; \mathbf{A}^2\mathbf{B}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ -18 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{M}_c) = 0, \quad \det(\mathbf{M}_o) = 0, \quad \left(\operatorname{rank}(\mathbf{M}_c) = 2, \quad \operatorname{rank}(\mathbf{M}_o) = 2\right)$$

Esimerkki

- Systeemin kertaluku on kolme, mutta sekä ohjattavuus- että tarkkailtavuusmatriisin rangit ovat kaksi. Systeemillä on yksi ei-saavutettava ja yksi ei-tarkkailtava tila.
  - Ohjattavuusmatriisissa toinen rivi on nollarivi => toinen tila ei ole saavutettava.
  - Havaittavuusmatriisissa kolmas sarake on nollasarake => kolmas tila ei ole tarkkailtava.
- Tarkistetaan vielä tilojen stabiilius. Systeemin navat ovat:

$$KY: \quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (s+1)(s+2)(s+3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{navat}: \begin{cases} s_{p1} = -1 \\ s_{p2} = -2 \\ s_{p3} = -3 \end{cases}$$

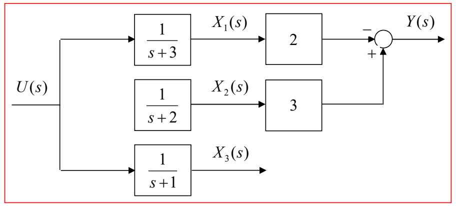
- Kaikki tilat ovat stabiileja (myös ei-saavutettava ja ei-tarkkailtava tila).

Esimerkki

- Mikäli tahdotaan analysoida systeemin sisäisiä riippuvuuksia tarkemmin, niin tilaesitys voidaan purkaa ja kullekin tilalle saadaan määritettyä riippuvuudet

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) + u(t) \\ y(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+3}U(s) \\ X_2(s) = \dfrac{1}{s+2}x_2(0) \\ X_3(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) \\ Y(s) = -2X_1(s) + 3X_2(s) \end{cases}$$

Kuvasta nähdään selvästi, että tilaa 2 ei voida ohjata ja tilaa 3 ei voida tarkkailla.



Systeemin tulo-lähtökäyttäytyminen on 1. kertalukua $-2/(s+3)$. On tapahtunut kaksi nolla-napa-supistumista.

Näin voi käydä vain, jos systeemissä on ei-saavutettavia tai ei-tarkkailtavia moodeja.

Systeemin hallinta ja estimointi

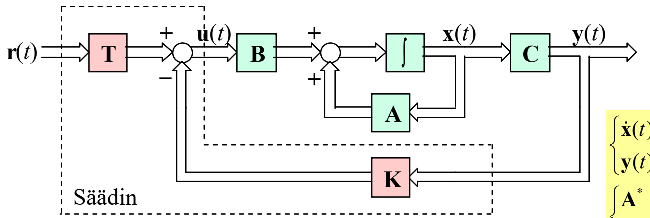
- Nyt ollaan tutkittu systeemin ominaisuuksia tilaesityksen kannalta ja jos todetaan että systeemi on saavutettava ja tarkkailtava niin saattaa herätä kysymys "entä sitten?"
- Mikäli systeemi on saavutettava, niin tilasäätimellä säädetyn systeemin navat voidaan asetella mielivaltaisesti eli systeemi saadaan käyttäytymään miten ikinä halutaan - ja mikäli systeemi ei ole täysin saavutettava, mutta ei-ohjattavat tilat ovat kuitenkin asymptoottisesti stabiileja, niin systeemiä voidaan hallita rajallisesti.
- Mikäli systeemi on täysin tarkkailtava, niin tilaestimaattorilla voidaan estimoida tilojen käyttäytyminen (estimointivirheen dynamiikkaa kuvaavan systeemin navat voidaan asetella mielivaltaisesti) - ja mikäli systeemi ei ole tarkkailtava mutta ei-tarkkailtavat tilat ovat kuitenkin asymptoottisesti stabiileja, niin osa systeemin tiloista voidaan estimoida.

Takaisinkytketty säätö lähtösuureesta

- Takaisinkytketty säätö voidaan toteuttaa lähtösuureen takaisinkytkentänä

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{cases},\quad \mathbf{u}(t)=\mathbf{T}\mathbf{r}(t)-\mathbf{K}\mathbf{y}(t)=\mathbf{T}\mathbf{r}(t)-\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\big(\mathbf{T}\mathbf{r}(t)-\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\big)=\big(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\big)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{r}(t)=\mathbf{A}^*\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}^*\mathbf{r}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$



Säädetty järjestelmä:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}^*\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}^*\mathbf{r}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{A}^*=\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}\\ \mathbf{B}^*=\mathbf{B}\mathbf{T}\end{cases}$$

2. Esimerkki: Mekaanisen systeemin säätö

- Mekaanista systeemiä kuvaa malli:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}0&1\\-5&-2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

- Tehdään systeemille säädin (takaisinkytkentä lähtösuureesta) ja tutkitaan, mihin säädetyn järjestelmän navat voidaan sijoittaa säätimen eri virityksillä.

$$u(t)=Tr(t)-Ky(t)=Tr(t)-k_1y(t)$$

$$\text{K.Y.:}\quad \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}^*)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})=\det\left(s\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\-5&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}k_1\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\begin{bmatrix}s&-1\\5+k_1&s+2\end{bmatrix}=s(s+2)+5+k_1=s^2+2s+(5+k_1)=0$$

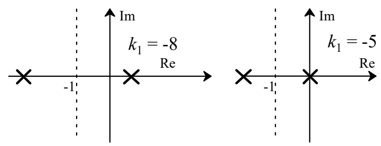
- Määritetään T siten, että säädetyn järjestelmän staattinen vahvistus on yksi.

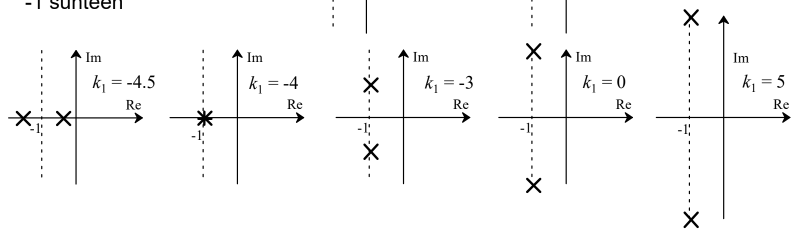
$$\lim_{s\to 0}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}\right\}=\frac{T}{5+k_1}=1\quad\Rightarrow\quad T=5+k_1$$

2. Esimerkki: Mekaanisen systeemin säätö

- Säätimeksi saadaan: $u(k)=Tr(k)-Ky(k)=(5+k_1)r(k)-k_1y(k)$
- Säädetyn järjestelmän navat ovat: $s_{p,1,2}=-1\pm\sqrt{-4-k_1}$
- Säädetyn järjestelmän staattinen vahvistus on yksi (jos säädetty järjestelmä on stabiili)

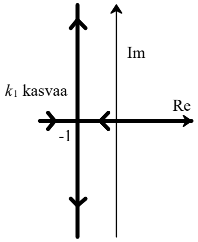
Säädetyn järjestelmän navat ovat aina symmetrisiä pisteen -1 suhteen

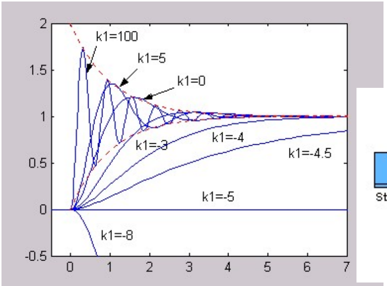


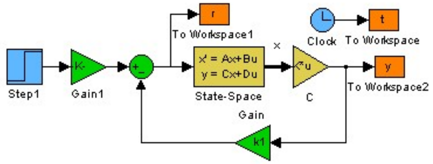


2. Esimerkki: Mekaanisen systeemin säätö

- Kun k_1: muuttuu -∞:stä ∞:ään niin säädetyn järjestelmän navat liukuvat kuvassa esitettyä uraa pitkin. Ura on nimeltään juuriura.
  - Tässä yhteydessä riittää, että todetaan eksponentiaalisen nopeuden olevan kaikilla mahdollisilla virityksillä rajoitettu $\exp(-t)$:tä ($s_p = -1$) hitaammaksi (kuvassa katkoviivalla).







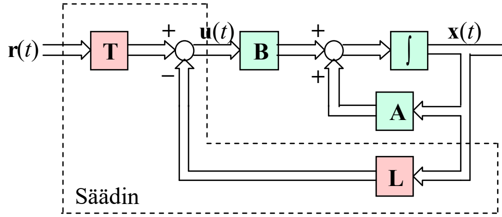
Aalto-yliopisto

Takaisinkytketty säätö tilasuureesta

- Kun tehdään takaisinkytkentä tilasuureesta, niin säädetylle järjestelmälle saadaan

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t)\end{cases}, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{Tr}(t) - \mathbf{Lx}(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{Tr}(t) - \mathbf{Lx}(t)) = (\mathbf{A} - \mathbf{BL})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BTr}(t) = \mathbf{A}^*\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t)\end{cases}$$



Säädetty järjestelmä:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^*\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{BL} \\ \mathbf{B}^* = \mathbf{BT}\end{cases}$$

Aalto-yliopisto

2. Esimerkki: Mekaanisen systeemin tilasäätö

- Mekaanista systeemiä kuvaa malli:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -5 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}u(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t) = \mathbf{Cx}(t)\end{cases}$$

$$u(t) = Tr(t) - \mathbf{Lx}(t) = Tr(t) - \begin{bmatrix}l_1 & l_2\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

- Tilasäätimellä säädetyn järjestelmän karakteristinen yhtälö on:

$$\text{K.Y.:}\quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL}) = \det\left(s\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -5 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1 & l_2\end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{bmatrix}s & -1 \\ 5 + l_1 & s + 2 + l_2\end{bmatrix} = s(s + 2 + l_2) + 5 + l_1 = s^2 + (2 + l_2)s + (5 + l_1) = 0$$

- Tästä nähdään, että sopivalla l_1:n ja l_2:n valinnalla voidaan saada mielivaltainen karakteristinen yhtälö - ja navat asetettua mielivaltaisesti:

$$s^2 + (2 + l_2)s + (5 + l_1) = 0$$

Aalto-yliopisto

2. Esimerkki: Mekaanisen systeemin tilasäätö

- Tehdään systeemille kaksi tilasäädintä:
  - Ensimmäisellä säädetyn järjestelmän navat saadaan pisteeseen -1. Tällöin karakteristinen yhtälö on: $s^2 + 2s + 1 = 0$.
  - Toisella säädetyn järjestelmän navat saadaan pisteeseen -5. Tällöin karakteristinen yhtälö on: $s^2 + 10s + 25 = 0$.
- Ensimmäisessä tapauksessa:

$$s^2 + (2 + l_2)s + (5 + l_1) \equiv s^2 + 2s + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}2 + l_2 = 2 \\ 5 + l_1 = 1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}l_2 = 0 \\ l_1 = -4\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix}-4 & 0\end{bmatrix}$$

- Toisessa tapauksessa:

$$s^2 + (2 + l_2)s + (5 + l_1) \equiv s^2 + 10s + 25 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}2 + l_2 = 10 \\ 5 + l_1 = 25\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}l_2 = 8 \\ l_1 = 20\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix}20 & 8\end{bmatrix}$$

- Staattiseksi vahvistukseksi saadaan

$$\lim_{s \to 0}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL})^{-1}\mathbf{BT}\right\} = \frac{T}{5 + l_1} = 1 \quad \Rightarrow \quad T = 5 + l_1$$

Aalto-yliopisto

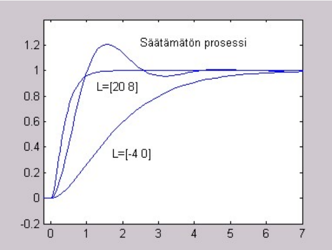
2. Esimerkki: Mekaanisen systeemin tilasäätö

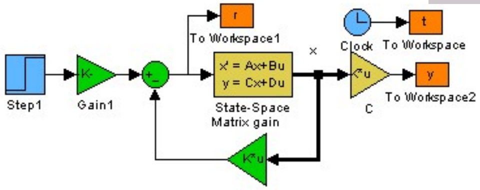
- Ensimmäinen tilasäädin:

$$u(t) = Tr(t) - \mathbf{L}\mathbf{x}(t) = r(t) - \begin{bmatrix}-4 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

- Toinen tilasäädin:

$$u(t) = Tr(t) - \mathbf{L}\mathbf{x}(t) = 25r(t) - \begin{bmatrix}20 & 8\end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$





Aalto-yliopisto

Tilan estimointi

- Jos tahdotaan toteuttaa tilasäätö (takaisinkytkentä tiloista), mutta kaikki tilat eivät ole mitattavissa, niin silloin joudutaan turvautumaan tilatarkkailijaan (tilahavaitsijaan), joka estimoi ei-mitattavia (ja myös mitattavia) tiloja.
- Miten tilaa sitten estimoidaan? Tarkastellaan esimerkin 2 mekaanista järjestelmää, jonka avulla voidaan havainnollistaa eri menetelmiä.
  - Datan perusteella (esim. numeerinen derivointi)
  - Mallin perusteella (esim. prediktiomalli)
  - Datan ja mallin yhdistäminen (esim. yleinen tilaestimaattori ja Kalmanin suodatin)
- Edellisessä esimerkissä oletettiin, että sekä paikka että nopeus on suoraan mitattavissa, jolloin tilatakaisinkytkentä voitiin toteuttaa suoraan mitatuista suureista. Nyt oletetaan, että ainoastaan paikka saadaan mitattua ja nopeus on estimoitava paikkamittauksen $y(t)$ ja tunnetun ohjauksen $u(t)$ perusteella.

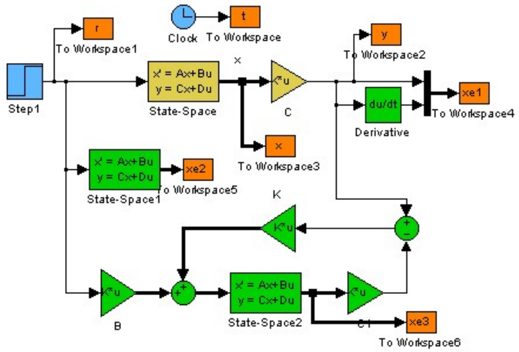
Aalto-yliopisto

Tilan estimointi

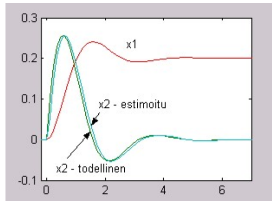
- Datan perusteella
  - Ensimmäinen tilasuure on paikka (mitattu) ja toinen nopeus (estimoitava)
  - Jos derivoidaan paikkasignaali numeerisesti, niin saadaan nopeuden estimaatti.
- Mallin perusteella
  - Kun malli tunnetaan, niin siihen voidaan syöttää herätteinä todellisia, mitattuja ohjaussignaaleja ja laskea mallin perusteella nopeussignaali.
- Mallin ja datan yhdistelmällä
  - Käytetään mallin ennustamaa tilaa, jota korjataan datan perusteella (itse asiassa mitatun lähtösuureen ja mallin ennustaman lähtösuureen välisen poikkeaman perusteella)

Aalto-yliopisto

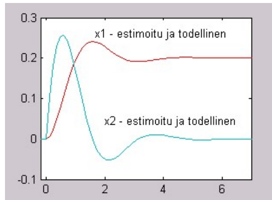
Esimerkki 2: Tilan estimointi



Numeerinen derivointi



Mallin ja yhdistelmän perusteella

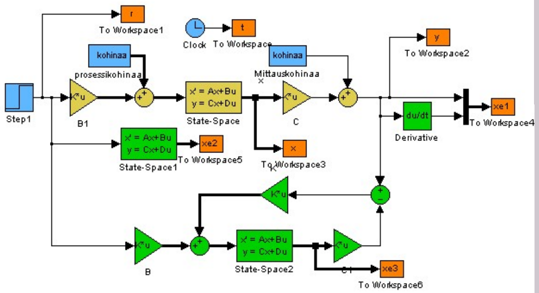


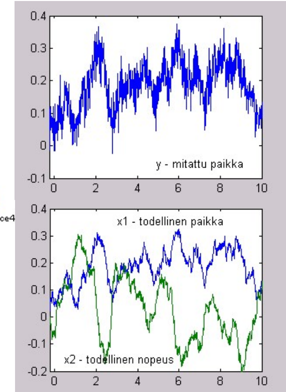
Tässä häiriöttömässä, deterministisessä tapauksessa toinen ja kolmas estimaattori antavat identtiset tulokset

Aalto-yliopisto

Esimerkki 2: Tilan estimointi

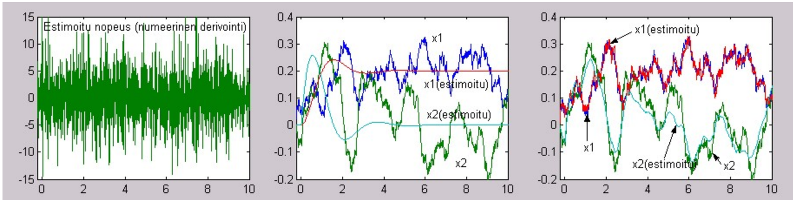
- Otetaan realistisempi tapaus, jossa on mukana sekä prosessi- että mittauskohinaa.
  - Saadaan seuraavat tulokset





Esimerkki 2: Tilan estimointi

- Numeerinen derivointi estimoi nopeutta huonosti, kun systeemissä on korkeataajuista kohinaa
- Malliin perustuva estimaatti ottaa huomioon ainoastaan tunnetut ohjaussignaalit. Kaikki tilavaihtelut, jotka johtuvat tuntemattomista häiriöistä jäävät estimoimatta.
- Tilaestimaattori, joka korjaa mallin ennustamaa tilasuuretta datan avulla antaa kaikkein parhaan estimaatin. Sen lisäksi, että se estimoi nopeutta, se myös suodattaa mitattua paikkasuuretta.

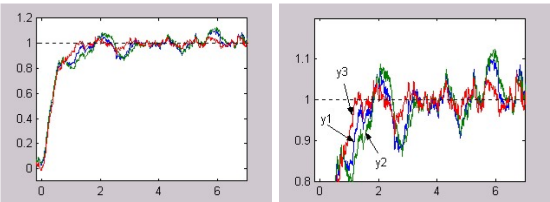


Esimerkki 2: Tilasäätö estimoidusta tilasta

- Estimoidusta tilasta toteutettiin edellä laskettu tilatakaisinkytkentä

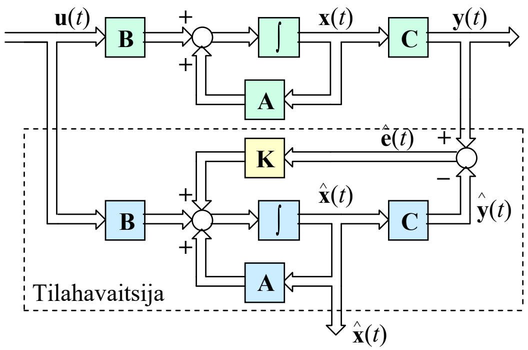
$$u(t) = Tr(t) - \mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = 25r(t) - \begin{bmatrix}20 & 8\end{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$$

  - Takaisinkytkentä poistaa häiriöitä ja stabiloi systeemin
  - Huolimatta siitä, mitä edellä esitetyistä tilaestimaattoreista käytetään, niin säätötulos on tyydyttävä. Paras säätötulos saavutettiin parhaalla estimaattorilla (joka yhdistää mallin ja datan)



Tilaestimointi

- Tarkastellaan nyt mallin ja datan yhdistävän tilaestimaattorin (edellisen esimerkin kolmas estimaattori) rakennetta tarkemmin.



$\mathbf{x(t)}$ todellinen tila

$\hat{\mathbf{x}}\mathbf{(t)}$ tilan estimaatti

$\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{(t)}$ estimaatin poikkeama eli virhe

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Tilaestimointi

- Tilahavaitsija: $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{K}\hat{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{K}\left(\mathbf{y}(t)-\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right)$

$$= \left(\mathbf{A}-\mathbf{KC}\right)\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{Ky}(t)$$

- Vertaillaan todellista prosessia ja estimaattoria:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t)+\mathbf{Bu}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{K}\left(\mathbf{y}(t)-\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{K}\left(\mathbf{Cx}(t)-\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right) \end{cases}$$

- Vähennetään prosessin ja estimaattorin lausekkeet toisistaan:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)-\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{Ax}(t)+\mathbf{Bu}(t)-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t)-\mathbf{Bu}(t)-\mathbf{K}\left(\mathbf{Cx}(t)-\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right)$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t))-\mathbf{KC}(\mathbf{x}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t)) = \left(\mathbf{A}-\mathbf{KC}\right)(\mathbf{x}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t))$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)-\hat{\mathbf{x}}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \left(\mathbf{A}-\mathbf{KC}\right)\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

- Saadaan estimointivirheen pienenemistä kuvaava lauseke

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \left(\mathbf{A}-\mathbf{KC}\right)\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^*\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

Esimerkki 2: Tilaestimointi

- Tehdään edellisten esimerkkien mekaaniselle systeemille tilatarkkailija

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t) = \mathbf{Ax}(t)+\mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) = \mathbf{Cx}(t) \end{cases} \qquad \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \left(\mathbf{A}-\mathbf{KC}\right)\hat{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{Bu}(t)+\mathbf{K}y(t), \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

- Saadaan estimointivirheen pienenemistä kuvaava karakteristinen yhtälö

$$\text{K.Y.:} \quad \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}^*) = \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{KC}) = \det\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det\begin{bmatrix} s+k_1 & -1 \\ 5+k_2 & s+2 \end{bmatrix} = (s+k_1)(s+2)+5+k_2 = s^2+(2+k_1)s+(5+2k_1+k_2) = 0$$

  - Jälleen nähdään, että sopivalla virityksellä (k_1:n ja k_2:n arvoilla) navat saadaan aseteltua mielivaltaisesti

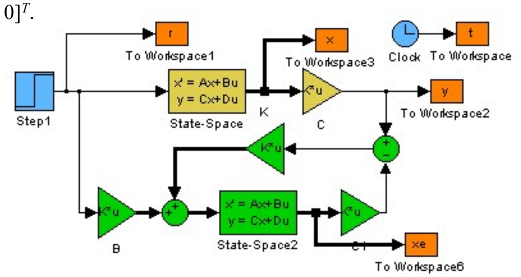
$$s^2+(2+k_1)s+(5+2k_1+k_2) = 0$$

2. Esimerkki: Mekaanisen systeemin estimointi

- Sijoitetaan estimointivirheen pienenemistä kuvaavat navat pisteeseen -5. Tällöin karakteristinen yhtälö on: $s^2 + 10s + 25 = 0$.

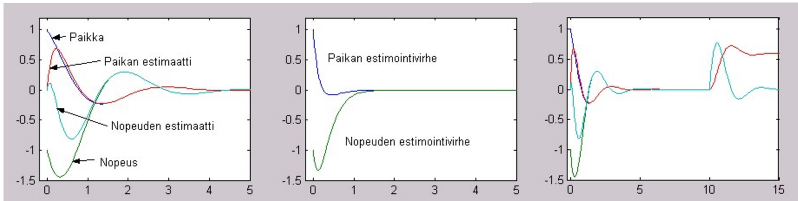
$$s^2+(2+k_1)s+(5+2k_1+k_2) \equiv s^2+10s+25 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = 8 \\ k_2 = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

  - Simuloinnissa todellinen alkutila on $[1\ {-1}]^T$ kun taas estimaattorilla on alkutila $[0\ 0]^T$.



2. Esimerkki: Mekaanisen systeemin estimointi

- Estimaattori löytää todellisen tilan nopeasti: todellinen alkutila [paikka nopeus]^T on [1 -1]^T ja estimaattorin alkutila on [0 0]^T.
- Kun oikea tila on löydetty, niin tunnetut ohjaukset eivät aiheuta estimointivirhettä. Simuloinnissa systeemiin syötettiin askelmainen heräte hetkellä 10.



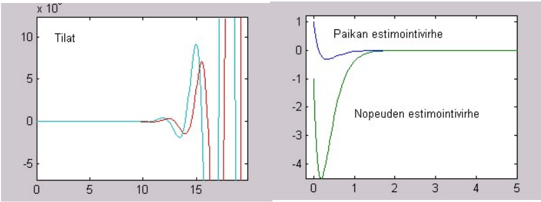
Esimerkki: Epästabiilin systeemin estimointi

- Tarkastellaan vielä simuloinnin avulla, miten tilaestimaattori selviytyy epästabiilin systeemin estimoinnissa (epästabiili massakappale). Systeemi on:

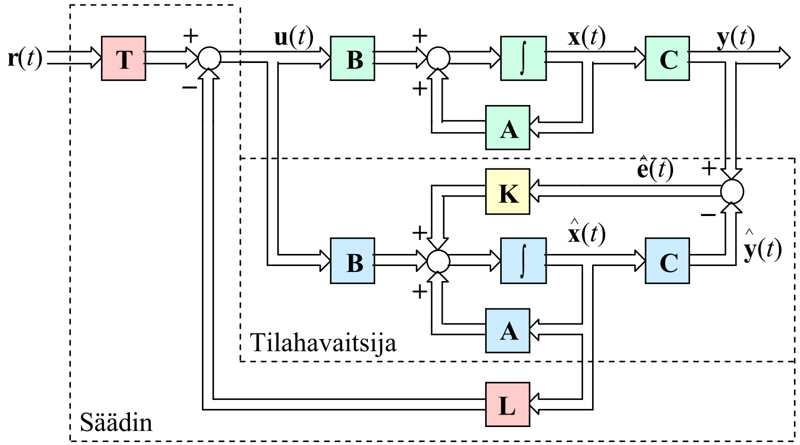
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$$\text{K.Y.:} \quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*) = s^2 + (k_1 - 2)s + (5 - 2k_1 + k_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12 \\ 44 \end{bmatrix}$$

Vaikka systeemi on epästabiili ja sekä todelliset että estimoidut tilat ovat rajoittamattomia, niin estimointivirhe pienenee, kuten suunniteltiin.



Tilaestimointi ja tilasäätö yhdistettynä



Tilaestimointi ja tilasäätö yhdistettynä

- Tarkastellaan miten säädetyn järjestelmän käyttäytyminen muuttuu, jos todellisen tilan sijasta käytetään estimoitua tilaa takaisinkytkennässä.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\left(\mathbf{C}\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t})\right) \end{cases}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{B}\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{B}\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\mathbf{C}\left(\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t})\right) \end{cases}$$

- Tehdään muuttujanvaihto: $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{r}(t) - \mathbf{B}\mathbf{L}\left(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\right) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\left(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\right) + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{r}(t) + \mathbf{K}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{r}(t) + \mathbf{B}\mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\mathbf{x}(t) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{r}(t) + \mathbf{B}\mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Tilaestimointi ja tilasäätö yhdistettynä

- Muodostetaan tilaesitys (lohkomatriiseilla)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\text{-}\mathbf{BL} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}\text{-}\mathbf{KC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{BT} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) \\ \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) \end{bmatrix}$$

- Säädetyn järjestelmän systeemimatriisi on yläkolmio(lohko)matriisi, jolloin ominaisarvot saadaan diagonaalilohkoilta. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan:

$$\text{K.Y.:} \quad \det\left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BL} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{KC} \end{bmatrix}\right) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL}) \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{KC}) = 0$$

- Eli säädetyn järjestelmän navat koostuvat estimointivirheen pienenemistä kuvaavista navoista ja tilasäätimellä säädetyn järjestelmän navoista (jossa oletetaan tilojen olevan suoraan mitattavissa) => tilasäädin ja tilaestimaattori voidaan suunnitella toisistaan riippumatta.

Tilaestimointi ja tilasäätö yhdistettynä

- Yhdistetään edellä laskettu tilasäädin ja tilaestimaattori ja simuloidaan koko järjestelmän käyttäytymistä

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\tilde{x}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-BL & BL\\ 0 & A-KC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \tilde{x}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}BT\\ 0\end{bmatrix}r(t)$$

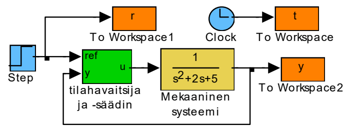
$$y(t)=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ \tilde{x}(t)\end{bmatrix}$$

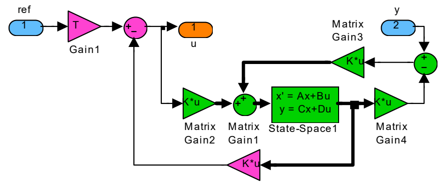
$$K=\begin{bmatrix}8\\ 4\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}20 & 8\end{bmatrix},\quad T=25$$

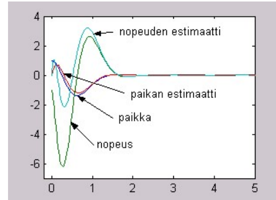
- Kun oikeat tilat on löydetty, niin säädetty järjestelmä käyttäytyy aivan kuten järjestelmä, jonka tilat on suoraan mitattavissa. Alussa systeemin alkutilat ja estimaattorin alkutilat poikkeavat toisistaan, jolloin käyttäytyminen on hitaampaa, mutta tämän jälkeen säädetty järjestelmä käyttäytyy perinteisen tilasäätimen kaltaisesti.

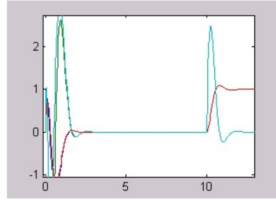
Tilaestimointi ja tilasäätö yhdistettynä

- Sekä tilahavaitsija että tilasäädin voidaan kätkeä loppukäyttäjältä, jolloin säädin on rakenteeltaan aivan kuten mikä tahansa perinteinen I/O-säädin.





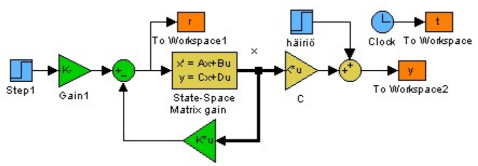


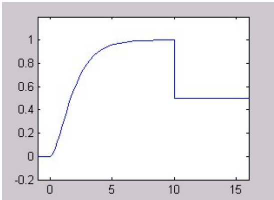


Aalto-yliopisto

Integroinnin augmentointi tilasäätöön (Ei vaadita)

- Tilasäädöllä saadaan navat aseteltua mielivaltaisesti, jolloin saadaan systeemin stabiilisuus, värähtelyt ja nopeus halutuksi - pysyvään poikkeamaan navoilla ei kuitenkaan voida vaikuttaa.
- Referenssisignaalin kerroin $\mathbf{T}$ tavallisesti mitoitetaan siten, että säädetyn järjestelmän staattiseksi vahvistukseksi saadaan yksi (jolloin pysyvä poikkeama katoaa)
- Kuormitushäiriöillä säätöjärjestelmä toimii huonosti. Ohessa on simulointi, jossa lähtösignaaliin summautuu askelmainen kuormitushäiriö (ei näy tiloissa). Säädin ei reagoi tähän mitenkään – kuormitushäiriö ei näy tiloissa ja seurauksena on pysyvä poikkeama

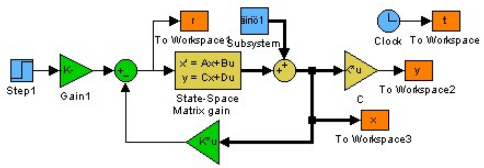


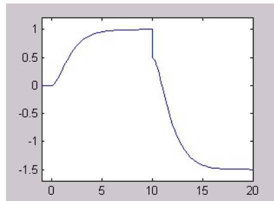


Aalto-yliopisto

Integroinnin augmentointi tilasäätöön

- Jos kuormitushäiriö summautuu tiloihin (tässä tapauksessa ensimmäiseen tilaan), niin tilasäädin reagoi häiriöön. Ikävä kyllä $\mathbf{T}$ on mitoitettu siten, että ainoastaan referenssisuureen muutosten pysyvä poikkeama poistuu – kuormitushäiriöön säädin reagoi valitettavan huonosti (säädetyn järjestelmän reagointi noudattaa kyllä suunniteltua dynamiikkaa, mutta loppuarvo on pielessä).
- Ainoa tapa poistaa kuormitushäiriön aiheuttama pysyvä poikkeama on integroida erosuuretta eli poikkeamaa halutun ja todellisen lähtösuureen välillä. Tällöin myös skaalausmatriisi $\mathbf{T}$ on turha – sama integrointi vie aina loppuarvon haluttuun pisteeseen.





Aalto-yliopisto

Integroinnin augmentointi tilasäätöön

- Säätämätön systeemi ja sen tilasäädin (ilman referenssiä) ovat

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{cases},\quad \mathbf{u}_v(t)=-\mathbf{L}\mathbf{x}(t)$$

- Ohjaukseen tahdotaan nyt mukaan erosuureen integraalista riippuva termi. Muodostetaan erosuureen integraaleista uusia tilamuuttujia $\mathbf{x}_I$

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_v(t)+\mathbf{u}_I(t),\quad \mathbf{u}_v(t)=-\mathbf{L}\mathbf{x}(t),\quad \mathbf{u}_I(t)=-\mathbf{L}_I\mathbf{x}_I(t)=-\mathbf{L}_I\int_0^t(\mathbf{y}_{ref}(\tau)-\mathbf{y}(\tau))d\tau$$

- Ohjaus voidaan myös esittää lohkomatriiseilla

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_v(t)+\mathbf{u}_I(t)=-\mathbf{L}\mathbf{x}(t)-\mathbf{L}_I\mathbf{x}_I(t)=-\left[\mathbf{L}\;\vdots\;\mathbf{L}_I\right]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \hdashline \mathbf{x}_I(t)\end{bmatrix}$$

- Uuden tilamuuttujan derivaatta on helppo laskea

$$\dot{\mathbf{x}}_I(t)=\mathbf{y}_{ref}(t)-\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}_{ref}(t)-\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Aalto-yliopisto

Integroinnin augmentointi tilasäätöön

- Säädetylle järjestelmälle saadaan nyt:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{cases},\begin{cases}\mathbf{u}(t)=-\mathbf{L}\mathbf{x}(t)-\mathbf{L}_I\mathbf{x}_I(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_I(t)=-\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}_{ref}(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)-\mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{x}(t)-\mathbf{B}\mathbf{L}_I\mathbf{x}_I(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_I(t)=-\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}_{ref}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t)\\ \hdashline \dot{\mathbf{x}}_I(t)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{L} & -\mathbf{B}\mathbf{L}_I\\ \hdashline -\mathbf{C} & \mathbf{0}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \hdashline \mathbf{x}_I(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{y}_{ref}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\left[\mathbf{C}\;\vdots\;\mathbf{0}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{x}(t)\\ \hdashline \mathbf{x}_I(t)\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}^*(t)=\mathbf{A}^*\mathbf{x}^*(t)+\mathbf{B}^*\mathbf{y}_{ref}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}^*\mathbf{x}^*(t)\end{cases}$$

- Säädetyn järjestelmän käyttäytyminen saadaan määritettyä asettelemalla säädetyn järjestelmän karakteristinen yhtälö halutuksi.

$$\text{K.Y.:}\quad \det\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}^*\right)=\det\left[\begin{array}{c:c}s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{L} & \mathbf{B}\mathbf{L}_I\\ \hdashline \mathbf{C} & s\mathbf{I}\end{array}\right]=0$$

Aalto-yliopisto

2. Esimerkki: integroiva tilasäädin

- Tehdään esimerkin mekaaniselle järjestelmälle integroiva tilasäädin ($L_I = l_3$).

$$\det\left[\begin{array}{c:c}s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{L} & \mathbf{B}l_3\\ \hdashline \mathbf{C} & s\end{array}\right]=\det\left[\begin{array}{cc:c}s & -1 & 0\\ 5+l_1 & s+2+l_2 & l_3\\ \hdashline 1 & 0 & s\end{array}\right]=s^3+(2+l_2)s^2+(5+l_1)s-l_3=0$$

- Tehdään systeemille integroiva tilasäädin, jolla säädetyn järjestelmän navat saadaan pisteeseen -1. Tällöin karakteristinen yhtälö on:

$$\text{K.Y.(haluttu):}\quad (s+1)^3=s^3+3s^2+3s+1=0$$

$$\text{K.Y.(todellinen):}\quad s^3+(2+l_2)s^2+(5+l_1)s-l_3=0$$

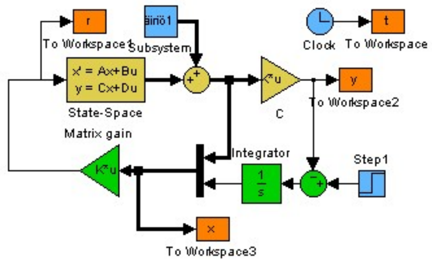
$$s^3+(2+l_2)s^2+(5+l_1)s-l_3\equiv s^3+3s^2+3s+1$$

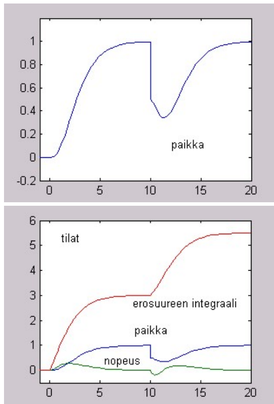
$$\Rightarrow\begin{cases}2+l_2=3\\ 5+l_1=3\\ -l_3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l_2=1\\ l_1=-2\\ l_3=-1\end{cases}\Rightarrow\quad \mathbf{L}=\left[l_1\quad l_2\;\vdots\;l_3\right]=\left[-2\quad 1\quad -1\right]$$

Aalto-yliopisto

2. Esimerkki: integroiva tilasäädin

- Integroiva tilasäädin poistaa pysyvän poikkeaman sekä referenssin että kuormitushäiriön osalta.





Aalto-yliopisto

Tilasäätimien ja estimaattorien dimensiot (huom. sis. monimuuttujajärjestelmät)

- Takaisinkytkentä lähtösuureesta

$$\dim\{\mathbf{K}\} = \dim\{\mathbf{u}\} \times \dim\{\mathbf{y}\}$$

- Takaisinkytkentä tilasta

$$\dim\{\mathbf{L}\} = \dim\{\mathbf{u}\} \times \dim\{\mathbf{x}\}$$

- Tilahavaitsija

$$\dim\{\mathbf{K}\} = \dim\{\mathbf{x}\} \times \dim\{\mathbf{y}\}$$

- Integroiva tilasäädin

$$\dim\{\mathbf{L}_I\} = \dim\{\mathbf{u}\} \times \dim\{\mathbf{y}\}$$

$$\Rightarrow \quad \dim\{\mathbf{L}^*\} = \dim[\mathbf{L} \;\vdots\; \mathbf{L}_I] = \dim\{\mathbf{u}\} \times \left(\dim\{\mathbf{x}\} + \dim\{\mathbf{y}\}\right)$$